

LE DEGRÉ DE LA VARIÉTÉ DES COURBES DE PONCELET

YANN SÉPULCRE

ABSTRACT. Nous calculons pour tout entier $n \geq 4$ le degré de la variété des courbes de Poncelet, qui est une sous-variété de dimension $2n + 5$ de l'espace projectif des courbes planes de degré n . Pour cela nous interprétons tout d'abord ce degré comme nombre d'intersection sur un espace de modules de faisceaux semi-stables sur \mathbf{P}_2 . Nous faisons alors appel à des espaces de modules de systèmes cohérents semi-stables pour différentes valeurs d'un paramètre rationnel positif, qui sont birationnels au premier, et qui sont liés entre eux par une suite d'éclatements et de contractions.

1. INTRODUCTION

La définition traditionnelle d'une courbe de Poncelet générale est la suivante:

Définition 1. Soit C une courbe plane lisse de degré n . Alors C est de Poncelet si et seulement si il existe une conique lisse E et un polygône non dégénéré à $n + 1$ côtés tangents à E dont les $\frac{n(n+1)}{2}$ sommets sont sur C .

On a le théorème suivant dû à Poncelet et Darboux (cf [D]).

Théorème 1. Soit C une courbe de Poncelet au sens défini ci-dessus, et soit E une conique fixée vérifiant la propriété ci-dessus pour un polygône donné \mathcal{P} . Alors \mathcal{P} appartient à un pinceau de polygônes dont l'élément général vérifie la même propriété pour E et C .

L'ensemble des courbes de Poncelet générales forme un sous-ensemble localement fermé P_n dans l'espace projectif des courbes planes de degré n . Dans [T], l'auteur montre que si E est lisse, et Θ est le fibré inversible de degré $n + 1$ sur E il existe un morphisme $\text{Grass}(2, H^0(\Theta)) \dashrightarrow P_n$ birationnel sur son image, constituée des courbes de Poncelet générales vérifiant avec E la propriété de la définition 1. Ceci permet de voir que P_n est irréductible de dimension $2n + 5$.

Définition 2. La variété des courbes de Poncelet est l'adhérence $\overline{P_n}$ de la sous-variété localement fermée P_n dans l'espace projectif des courbes planes de degré n .

On cherche à connaître le degré de $\overline{P_n}$, c'est-à-dire à évaluer le nombre d'intersection $h^{2n+5} \cap [\overline{P_n}]$, où h est la restriction à $\overline{P_n}$ de la classe du fibré $\mathcal{O}(1)$ sur l'espace projectif des courbes planes de degré n . Ceci va être fait en ramenant le calcul de ce nombre à celui d'un nombre d'intersection sur l'espace de modules M_n des faisceaux cohérents sur \mathbf{P}_2 , semi-stables de rang 2 et de classes de Chern $(0, n)$.

En effet, les courbes de Poncelet peuvent être interprétées comme courbes des droites de saut de tels faisceaux semi-stables F , vérifiant la condition $h^0(F(1)) \geq 2$. On appelle $\mathcal{P}_n \subseteq M_n$ le lieu, fermé et irréductible, des classes de tels faisceaux cohérents. On a un morphisme naturel

$$\beta : \mathcal{P}_n \longrightarrow \overline{P_n}$$

qui à la classe d'un faisceau associe sa courbe des droites de saut. Dans [T] il est prouvé que pour $n \geq 5$ ce morphisme est birationnel. Pour $n = 4$ c'est encore vrai grâce au travail fait dans [LT]. Si

l'on note $\mathcal{D} = \beta^*(h)$, ceci implique que

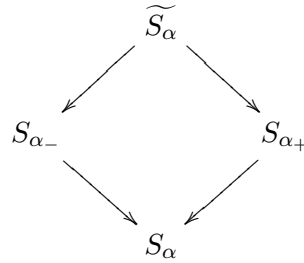
$$\deg \overline{P_n} = c_1(\mathcal{D})^{2n+5} \cap [\mathcal{P}_n] \quad (*)$$

Nous introduisons ensuite, pour chaque nombre rationnel $\alpha > 0$, un espace de modules de systèmes cohérents α -semi-stables, que l'on note $S_{\alpha,n}$ (l'entier n étant fixé, on notera plus simplement S_α). Chaque S_α est birationnel à la variété \mathcal{P}_n , et pour $\alpha \gg 0$ on a un morphisme birationnel de S_α sur \mathcal{P}_n . On montre sinon qu'il existe un ensemble fini de valeurs critiques de α telles qu'entre deux valeurs critiques α_i et α_{i+1} consécutives, la classe d'isomorphisme de S_α reste constante.

Pour chaque α non critique, on peut définir un fibré inversible \mathcal{D}_α sur S_α tel que si $\alpha \gg 0$, le fibré \mathcal{D}_α soit l'image réciproque de \mathcal{D} par le morphisme birationnel $S_{\alpha,n} \rightarrow \mathcal{P}_n$. Le calcul de (*) se mène donc en deux étapes:

- (1) évaluer pour chaque paramètre α **critique** la différence $c_1(\mathcal{D}_{\alpha_-})^{2n+5} \cap [S_{\alpha_-}] - c_1(\mathcal{D}_{\alpha_+})^{2n+5} \cap [S_{\alpha_+}]$, où α_- et α_+ sont deux valeurs très proches de α telles que $\alpha_- < \alpha < \alpha_+$;
- (2) évaluer $c_1(\mathcal{D}_\epsilon)^{2n+5} \cap [S_\epsilon]$ pour $\epsilon > 0$ et strictement inférieur à la plus petite valeur critique.

Le premier point occupe une large partie de cet article, le dernier occupant la dernière section. On est amené à mettre en relation les espaces de modules S_{α_-} et S_{α_+} : on montre que si l'on éclate ces deux variétés, à savoir S_{α_-} le long du fermé des classes de systèmes cohérents α_- -semi-stables mais non α_+ -semi-stables, et S_{α_+} le long du fermé des classes de systèmes cohérents α_+ -semi-stables mais non α_- -semi-stables, on obtient une même variété \widetilde{S}_α à isomorphisme près. On étudie ensuite plus précisément le diagramme de morphismes projectifs birationnels



qui est commutatif mais non cartésien, ce qui ne rend pas si aisé l'usage de la formule de projection pour le point (1). Ajoutons à cela que les espaces de modules S_α sont en général singuliers, et ce même si α est non critique. Nous montrerons ainsi qu'en général le diviseur exceptionnel de \widetilde{S}_α contient deux composantes irréductibles, chacune avec la multiplicité 1.

Nous obtenons finalement le théorème:

Théorème 2. *Le degré de la variété $\overline{P_n}$ des courbes de Poncelet de degré n est égal à: 54 lorsque $n = 4$, 6867 lorsque $n = 5$, 618 lorsque $n = 6$.*

Nous obtenons en fait des formules générales pour calculer $\deg \overline{P_n}$, mais dont les expressions sont lourdes. Nous nous sommes donc restreints à $n \leq 6$ pour les applications numériques.

2. FAISCEAUX COHÉRENTS SEMI-STABLES DE PONCELET

On fait d'abord quelques rappels sur la notion de semi-stabilité et les espaces de modules de faisceaux cohérents semi-stables.

2.1. Faisceaux semi-stables. Soit X une surface projective lisse, munie d'un fibré très ample $\mathcal{O}_X(1)$. Soit $K(X)$ le groupe de Grothendieck des classes de \mathcal{O}_X -modules cohérents; il est équipé de la forme quadratique d'intersection de cycles (cf [F]), et aussi de la forme quadratique entière q définie par $\chi(u^2)$, dont la forme polaire est notée $<, >$. Si F est un faisceau algébrique cohérent sur X , on désigne par χ_F son polynôme de Hilbert relatif à la polarisation donnée. Si Y est une section hyperplane de X , on note h la classe de \mathcal{O}_Y , de sorte que le polynôme de Hilbert est donné par la formule

$$\chi_F(m) = \frac{1}{2} < c, h^2 > m(m+1) + < c, h > m + \chi_F(0)$$

où c est la classe de F dans $K(X)$, et $\chi_F(0)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de F . La formule ci-dessus permet de définir pour toute classe de Grothendieck c un polynôme χ_c à coefficients rationnels. On peut associer un tel polynôme à tout élément de $K(X)_{\mathbb{Q}} = K(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Dans toute la suite l'ordre que nous considérons sur $\mathbb{Q}[X]$ est l'ordre lexicographique. Pour deux polynômes P et Q on écrit $P \geq Q$ si et seulement si $P - Q$ est de terme dominant positif. Le cône des classes de $K(X)$ de polynôme de Hilbert strictement positif est noté $K(X)_{\mathbb{Q}}^+$.

Définition 3. Soit F un faisceau algébrique cohérent sur X , dont le support schématique est de dimension d (c' est encore le plus grand entier d tel que $< c, h^d > \neq 0$); on définit la **multiplicité** de F comme le nombre entier défini par $r = < F, h^d >$. Nous appelons le polynôme $\frac{\chi_F}{r}$ le polynôme de Hilbert **réduit** de F .

Lorsque $d = 2$, il s'agit du rang de F , mais nous aurons besoin de la multiplicité de faisceaux de support une courbe.

Définition 4. Supposons F de classe de Grothendieck c , de multiplicité r , et de support de dimension d ; alors F est **(semi-)stable** relativement à la polarisation $\mathcal{O}_X(1)$ si:

- (1) tout sous-faisceau cohérent non nul $F' \subset F$ a un support de dimension d ,
- (2) si $0 < r' < r$ est la multiplicité d'un tel sous-faisceau, on a

$$\frac{\chi_{F'}}{r'} < \frac{\chi_F}{r} \quad (\text{resp. } \leq)$$

Chaque faisceau semi-stable F admet une filtration de Jordan-Hölder, i.e une filtration $\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_k = F$ par des sous-faisceaux cohérents tels que les gradués soient stables de même polynôme de Hilbert réduit que F . Le gradué total d'une telle filtration ne dépend que de F et détermine la classe dite de S-équivalence de F . Lorsque F est stable, classe de S-équivalence et classe d'isomorphisme coïncident.

Théorème 3. Soit $c \in K(X)$, il existe un espace de modules grossier $M_X(c)$ pour les faisceaux semi-stables de classe de Grothendieck c , qui est un schéma projectif, et dont les points sont les classes de S-équivalence de faisceaux semi-stables.

Preuve Voir [G]. ■

Venons en au cas où $X = \mathbf{P}_2$, $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1)$. Alors on a $K(X) \simeq \mathbb{Z}^3$, l'isomorphisme faisant correspondre à la classe u d'un faisceau cohérent sur \mathbf{P}_2 le triplet donné par son rang r , sa première classe de Chern c_1 , et sa caractéristique d'Euler-Poincaré χ . La forme quadratique entière q a pour expression: $q(u) = 2r\chi + c_1^2 - r^2$. On note h la classe d'une droite du plan. Soit $n \geq 4$ un entier.

Définition 5. On note \mathcal{M}_n l'espace de modules des faisceaux semi-stables de rang 2 et de classes de Chern $(0, n)$ sur \mathbf{P}_2 , c'est-à-dire de classe $c = 2 - nh^2$.

Dans [L], on trouve un exposé de propriétés générales de \mathcal{M}_n : ce sont des variétés projectives intègres de dimension $4n - 3$, localement factorielles, singulières si et seulement si n est pair. Pour tout faisceau cohérent semi-stable de classe $c = 2 - nh^2$ on a la notion de **droite de saut**: c'est une droite l du plan telle que $h^1(F(-1)|_l) \neq 0$, ou de manière équivalente telle que $F|_l$ n'est pas isomorphe à $\mathcal{O}_l \oplus \mathcal{O}_l$. L'ensemble des droites de saut de F forme une courbe projective de \mathbf{P}_2^* de degré n , dont l'équation est le déterminant du morphisme de fibrés vectoriels

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(-1) \otimes H^1(F(-2)) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*} \otimes H^1(F(-1))$$

Ceci motive la définition suivante.

Définition 6. *Il existe un morphisme bien défini de variétés projectives*

$$\beta : \mathcal{M}_n \longrightarrow |\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(n)|$$

qui à la classe d'un faisceau semi-stable associe sa courbe des droites de saut. On nomme β le morphisme de Barth.

Pour plus de détails on renvoie à [B] et [L3] (dans cette première référence l'auteur n'utilise cependant que l'ouvert quasiprojectif des classes de faisceaux stables). Le théorème de Le Potier-Tikhomirov établit que pour $n \geq 4$ le morphisme β est birationnel sur son image (voir [LT]).

2.2. Faisceaux semi-stables de Poncelet. Ils font l'objet de la définition suivante.

Définition 7. *Un faisceau semi-stable de classe de Grothendieck $c = 2 - nh^2$, est dit de Poncelet si et seulement si $h^0(F(1)) \geq 2$, où de manière équivalente $h^1(F(1)) \geq n - 4$.*

Faisons deux remarques: pour $n = 4$, tout faisceau semi-stable est de Poncelet; de plus pour tout $n \geq 4$ on a $h^0(F(1)) \leq 3$ (cf [LH]). La condition figurant dans la définition précédente est de nature déterminantielle, on en déduit que l'ensemble des classes de faisceaux de Poncelet forme un fermé dans \mathcal{M}_n , qu'on note \mathcal{P}_n .

Proposition 1. *Le sous-schéma fermé \mathcal{P}_n de \mathcal{M}_n est irréductible et normal de dimension $2n + 5$.*

Preuve Voir [LT] proposition 4.8. On y montre de plus que l'ouvert de \mathcal{P}_n des classes de faisceaux stables est de Cohen-Macaulay. ■

Le théorème suivant est fondamental pour la suite.

Théorème 4. *La restriction du morphisme de Barth β à \mathcal{P}_n est birationnelle sur son image, qui est $\overline{\mathcal{P}_n}$ (voir la définition 2 dans l'Introduction).*

Preuve Voir [T] pour $n \geq 5$. Pour $n = 4$ voir le théorème de Le Potier-Tikhomirov. ■

La preuve du théorème précédent, ainsi que celle du théorème de Le Potier-Tikhomirov, utilise la notion de système cohérent qui fait l'objet du paragraphe suivant.

2.3. Systèmes cohérents et faisceaux de Poncelet. Les systèmes cohérents permettent une description explicite de certains espaces de modules de faisceaux semi-stables car ils correspondent à un "dévissage" de ces faisceaux obtenus à partir de sous-espaces de sections globales (moyennant torsion). Il existe de nombreux travaux faisant usage de cette notion: citons [L1], [L2], [He], [Th]. Cette dernière référence traite d'espaces de modules de fibrés semi-stables sur les courbes,

avec pour horizon la formule de Verlinde; dans [He] on cherche à calculer les nombres de Donaldson du plan projectif, ce qui est plus proche de notre cadre. Cependant notre travail est bien distinct et s'appuie sur l'utilisation d'autres systèmes cohérents. Nous allons commencer par résumer certains des résultats généraux établis dans [He] sur les systèmes cohérents et leurs espaces de modules.

Supposons à nouveau que $(X, \mathcal{O}_X(1))$ soit une surface projective lisse et polarisée.

Définition 8. On appelle **système algébrique** un triplet (Γ, i, F) où F est un faisceau de \mathcal{O}_X -modules, Γ un espace vectoriel et i une application linéaire $\Gamma \rightarrow H^0(F)$. Lorsque i est injectif et F est cohérent, un tel système algébrique s'appelle un **système cohérent**, et on le note plus simplement (Γ, F) ; il est alors implicite que l'on s'est donné un sous-espace vectoriel $\Gamma \subseteq H^0(F)$. L'entier $k = \dim \Gamma$ est appelé le **rang** du système cohérent, l'entier d égal à la dimension du support de F est appelé sa **dimension**.

On définit la notion de morphisme de systèmes algébriques: c'est la donnée d'un morphisme de faisceaux algébriques cohérents $f : F' \rightarrow F''$ et d'une application linéaire $g : \Gamma' \rightarrow \Gamma''$ tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Gamma' & \xrightarrow{g} & \Gamma'' \\ \downarrow i' & & \downarrow i'' \\ H^0(F') & \xrightarrow{h^0(f)} & H^0(F'') \end{array}$$

A partir de cette définition on voit assez facilement que les systèmes algébriques forment une catégorie abélienne; on montre qu'elle possède assez d'objets injectifs. La sous-catégorie des systèmes cohérents est additive mais non abélienne.

On associe à un système **cohérent** $\Lambda = (\Gamma, F)$ et une classe $\alpha \in K(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ la classe de Grothendieck à coefficients rationnels

$$c_{\alpha}(\Lambda) = \dim \Gamma \cdot \alpha + c(F)$$

Définition 9. Un système cohérent $\Lambda = (\Gamma, F)$ de dimension d tel que F soit de multiplicité r est dit α -**(semi)-stable** si F n'a pas de sous-faisceau cohérent non nul de support de dimension $< d$ et si pour un tel sous-module F' de multiplicité $0 < r' < r$ on a, en posant $\Gamma' = \Gamma \cap H^0(F')$ et $\Lambda' = (\Gamma', F')$, l'inégalité

$$\frac{\chi_{c_{\alpha}(\Lambda')}}{r'} < \frac{\chi_{c_{\alpha}(\Lambda)}}{r} \quad (\text{resp. } \leq)$$

Etant donné Λ un système cohérent α -semi-stable, il lui est associé une filtration de Jordan-Hölder, dont les gradués ont le même polynôme de Hilbert réduit $\frac{\chi_{c_{\alpha}(\Lambda)}}{r}$. Deux systèmes cohérents de dimension d et de multiplicité r , et α -semi-stables, sont dits S -équivalents si leurs gradués totaux de Jordan-Hölder sont isomorphes.

Théorème 5. Soient k un entier positif et c une classe dans $K(X)$. Il existe pour les systèmes cohérents $\Lambda = (\Gamma, F)$, tels que $\dim \Gamma = k$ et $c(F) = c$, qui sont α -semi-stables, un espace de modules **grossier** $\mathcal{S}_X(c, k)$; c'est un schéma projectif dont les points sont les classes de S -équivalence de systèmes cohérents α -semi-stables.

Preuve Voir [He]. ■

Pour définir l'espace de modules $\mathcal{S}_X(c, k)$, on a besoin de définir des familles **plates** de systèmes cohérents. C'est ce que nous faisons plus loin au paragraphe 3.3. Alors $\mathcal{S}_X(c, k)$ représente en un sens faible le foncteur qui à un schéma S associe les familles plates sur S de systèmes cohérents de type (c, k) .

Revenons maintenant au cas $X = \mathbf{P}_2$, $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1)$. Soit $n \geq 4$, et soit α un nombre **rationnel** strictement **positif**, correspondant à une classe dans $K(\mathbf{P}_2)_{\mathbb{Q}}$ de rang 0, première classe de Chern 0, et de caractéristique d'Euler α (qui sont les trois composantes de l'isomorphisme $K(\mathbf{P}_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}^3$). On considère des systèmes cohérents $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ tels que $c(\Theta) = 2h + nh^2$, $\dim \Gamma = 2$. Le faisceau Θ étant de multiplicité 2 et de caractéristique d'Euler-Poincaré $n + 2$, la condition de α -semi-stabilité s'écrit encore

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \dim \Gamma' + \chi(\Theta') &\leq \alpha + \frac{\chi(\Theta)}{2} \\ &\leq \alpha + \frac{n}{2} + 1 \end{aligned}$$

pour tout sous-faisceau cohérent Θ' de multiplicité 1 (i.e de support schématique une droite), avec $\Gamma' = \Gamma \cap H^0(\Theta')$.

Lemme 1. *Sous les hypothèses précédentes, si (Γ, Θ) est α -semi-stable, on a $H^1(\Theta) = 0$, et Θ est engendré par ses sections.*

Preuve On observe que si le faisceau cohérent Θ est semi-stable (au sens de la définition 4), alors $H^1(\Theta(i)) = 0$ pour $i \geq -1$. Le faisceau Θ est alors 0-régulier (au sens de Castelnuovo-Mumford) et engendré par ses sections. Si Θ n'est pas semi-stable, il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{l'}(a) \longrightarrow \Theta \longrightarrow \mathcal{O}_{l''}(b) \longrightarrow 0$$

où $a > b$ sont deux entiers et l', l'' sont deux droites. On a $a > 0$; supposons $b \leq 0$ alors $\chi(\mathcal{O}_{l''}) \leq 1$, et $\chi(\Theta) \leq a + 2$. De plus $\Gamma' = \Gamma \cap H^0(\mathcal{O}_{l'}(a))$ est de dimension ≥ 1 , et la condition de α -semi-stabilité implique

$$\alpha + a + 1 \leq \alpha + 1 + \frac{a}{2}$$

ce qui est absurde. Donc $b > 0$, et le résultat est alors immédiat. ■

Lemme 2. *Avec les notations qui précèdent, pour $\alpha > \frac{n}{2} - 1$, la condition de α -semi-stabilité est équivalente à la condition suivante: pour tout sous-faisceau cohérent $\Theta' \subset \Theta$ de multiplicité 1, on a $\dim \Gamma' \leq \frac{\dim \Gamma}{2} = 1$, et si on a égalité alors $\chi(\Theta') \leq \frac{n}{2} + 1$.*

Preuve Supposons que (Γ, Θ) soit α -semi-stable. On a pour tout sous-faisceau Θ' de multiplicité 1 l'inégalité

$$\alpha(\dim \Gamma' - 1) + \chi(\Theta') \leq \frac{n}{2} + 1$$

Si on a $\alpha > \frac{n}{2} - 1$, et $\dim \Gamma' = 2$, alors $\chi(\Theta') \leq \frac{n}{2} + 1 - \alpha < 2$. On aurait donc $\chi(\Theta') \leq 1$. Mais comme Θ' est un faisceau de la forme $\mathcal{O}_l(m)$, avec m un entier, qui admet un pinceau de sections globales, on a nécessairement $\chi(\Theta') \geq 2$, contradiction. On a donc nécessairement $\dim \Gamma' \leq 1$, ce qui prouve une implication. Réciproquement, supposons que la deuxième condition soit vérifiée, alors on doit vérifier que dans le cas où $\Gamma' = 0$ on a $\chi(\Theta') \leq \frac{n}{2} + \alpha + 1$. Mais on a $\chi(\Theta') \leq n$, car sinon $h^0(\Theta') \geq n + 1$, et comme $h^0(\Theta) = n + 2$ d'après le lemme précédent, on aurait $\Gamma' \neq 0$, contradiction. D'où l'énoncé. ■

Ci-dessous nous présentons les espaces de modules de systèmes cohérents auxquels nous ferons appel.

Définition 10. Pour $\alpha > 0$ rationnel on pose $\mathcal{S}_{\alpha,n}$ l'espace de modules des systèmes cohérents α -semi-stables $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ tels que $\dim \Gamma = 2$ et $c(\Theta) = 2h + nh^2$.

L'entier n étant fixé, on note plus simplement $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_{\alpha,n}$ dans la suite. Le lien entre faisceaux de Poncelet et systèmes cohérents α -semi-stables est exposé dans ce qui suit.

Soit F un faisceau cohérent de Poncelet, supposé donc de rang 2 et de classes de Chern $(0, n)$, et considérons un sous-espace vectoriel $W \subseteq H^0(F(1))$ de dimension 2; il existe alors une suite exacte courte dont la flèche de gauche est le morphisme d'évaluation:

$$0 \longrightarrow W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \longrightarrow F(1) \longrightarrow \Omega \longrightarrow 0$$

Le conoyau Ω est un faisceau cohérent de support une conique, de caractéristique d'Euler $\chi = 4 - n$. Posons $\Theta = \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}}^1(\Omega, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2})$, alors Θ est un faisceau de classe de Grothendieck $2h + nh^2$, n'admettant pas de sous-faisceau cohérent de support fini, et posant Γ l'espace vectoriel dual de W , on a une inclusion naturelle $\Gamma \subset H^0(\Theta)$.

Proposition 2. Avec les notations qui précèdent, pour $\alpha > \frac{n}{2} - 1$, il y a équivalence entre la propriété que F soit semi-stable et la propriété que (Γ, Θ) soit α -semi-stable.

Preuve En utilisant le lemme 2, on peut appliquer la preuve de [LT], Th.4.3 (i). ■

Comme nous l'avons vu, pour $\alpha > \frac{n}{2} - 1$ la propriété de α -semi-stabilité ne dépend pas d'un choix particulier de α , la classe d'isomorphisme de l'espace de modules \mathcal{S}_α reste donc constante.

Théorème 6. Pour $\alpha > \frac{n-2}{2}$ il existe un morphisme bien défini

$$\pi_\alpha : \mathcal{S}_\alpha \longrightarrow \mathcal{P}_n$$

qui à la classe de S -équivalence de (Γ, Θ) associe la classe du faisceau semi-stable F défini par l'extension figurant dans la proposition 2. De plus π_α est surjectif et est un isomorphisme au dessus de l'ouvert de \mathcal{P}_n des classes de faisceaux F tels que $h^0(F(1)) = 2$.

Preuve Voir [LT] Th.4.3 (ii). ■

Les morphismes π_α sont compatibles avec les isomorphismes canoniques entre les \mathcal{S}_α . Notons les π . Il ressort du théorème précédent et du théorème 4, que le degré de la variété des courbes de Poncelet est égal à

$$\deg \overline{\mathcal{P}}_n = c_1(\gamma^* \mathcal{O}(1))^{2n+5} \cap [\mathcal{S}_\alpha]$$

pour $\alpha > \frac{n-2}{2}$, le morphisme γ étant la composée $\beta \circ \pi$, et $\mathcal{O}(1)$ étant la restriction du fibré très ample canonique à $\overline{\mathcal{P}}_n$.

3. ETUDE D'ESPACES DE MODULES DE SYSTÈMES COHÉRENTS

Soit $n \geq 4$ un entier fixé, et $\alpha > 0$ un nombre rationnel. On a introduit à la section précédente les espaces de modules $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_{\alpha,n}$ (on omettra l'indice n) qui sont des schémas projectifs. Dans cette section nous rappelons quelques propriétés de base de ces schémas. Puis au paragraphe 3.3 nous définissons les notions de familles, familles plates de systèmes algébriques et cohérents, et

groupes et faisceaux \mathcal{E}_{xt} qui nous permettront ultérieurement de mener une étude plus approfondie.

Le premier fait général et important est que quelque soit α , l'espace de modules \mathcal{S}_α est intègre de dimension $2n+5$. Le second fait général que nous allons exposer est qu'il existe des valeurs critiques $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_r$ de α telles que sur chaque intervalle $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$, la classe d'isomorphisme de \mathcal{S}_α reste constante. En $\alpha = \alpha_i$, on prend $\alpha_{i-1} < \alpha_- < \alpha_i$ et $\alpha_i < \alpha_+ < \alpha_{i+1}$ deux valeurs proches de α , et on montre qu'on dispose de deux morphismes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{\alpha_-} & & \mathcal{S}_{\alpha_+} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathcal{S}_\alpha & \end{array}$$

qui sont birationnels, donc surjectifs. On montre ensuite que si l'on éclate \mathcal{S}_{α_-} et \mathcal{S}_{α_+} le long de fermés que nous explicitons, on obtient une même variété projective à isomorphisme près.

3.1. Rappels sur la construction des espaces de modules. La construction des espaces de modules de systèmes cohérents est très semblable à celle, utilisant la théorie géométrique des invariants, servant à construire les espaces de modules de faisceaux semi-stables de classe donnée (on renvoie à [G] et [L] pour les détails de cette construction).

Nous résumons ici une construction spécifique aux espaces de modules \mathcal{S}_α , un peu plus simple pour des raisons numériques. Soit la classe de Grothendieck $c = 2h + nh^2$ et soit $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ un système cohérent α -semi-stable tel que $c(\Theta) = c$, $\dim \Gamma = 2$. On prend un espace vectoriel H de dimension $\dim H^0(\Theta) = n+2$. On pose $V = \text{Grass}(2, H) \times \text{Quot}^c(H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2})$ qui est un schéma projectif dont les points fermés paramètrent les couples donnés par un faisceau algébrique quotient Θ de $H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$ de classe de Grothendieck c , et un sous-espace $\Gamma \subset H$ de dimension 2. Il existe une **action** naturelle du groupe $GL(H)$ sur V .

On considère l'ouvert $V^{ss} \subset V$ des points paramétrant des faisceaux quotients sans sous-faisceaux de support fini, tels que $H^1(\Theta) = 0$, tels que l'application $H \rightarrow H^0(\Theta)$ soit un isomorphisme, et tels que le faisceau cohérent (Γ, Θ) obtenu soit α -semi-stable. De telles conditions proviennent du lemme 1.

Théorème 7. *Sous les hypothèses précédentes, l'espace de modules \mathcal{S}_α est un bon quotient de l'ouvert V^{ss} par l'action naturelle de $GL(H)$.*

Preuve Voir [He]. Le principe est d'établir une équivalence entre la propriété de α -semi-stabilité du système cohérent et la propriété de semi-stabilité pour l'action de $GL(H)$ relative à une polarisation du schéma projectif V dépendante de α . On peut donc voir les schémas \mathcal{S}_α comme une famille de bons quotients de V variant avec une polarisation. ■

3.2. Irréductibilité et normalité des espaces de modules. Les espaces de modules sont intègres de la bonne dimension $2n+5$ d'après le théorème suivant.

Théorème 8. *Les espaces de modules \mathcal{S}_α sont intègres et normaux de dimension $2n+5$.*

Preuve On peut reprendre mot pour mot la preuve de la proposition 4.5 de [LT], qui fonctionne grâce aux observations faites dans la preuve de la proposition 1 (qui interviennent au lemme 4.6 de la référence). ■

3.3. Familles de systèmes cohérents et déformations infinitésimales. Dans la section 2.3 il a été dit que la catégorie des systèmes algébriques possède assez d'objets injectifs.

Définition 11. *Etant donnés deux systèmes cohérents $\Lambda' = (\Gamma', F')$ et $\Lambda'' = (\Gamma'', F'')$, considérés comme des systèmes algébriques, on définit pour tout entier $q \geq 0$, le groupe $\text{Ext}^q(\Lambda', \Lambda'')$ comme le q -ième foncteur dérivé du foncteur exact à gauche $\mathcal{H}\text{om}$ appliqué à Λ' et Λ'' .*

Il est assez facile de voir, grâce aux théorèmes de finitude cohomologique de Serre, que ces espaces vectoriels sont de dimension finie.

Proposition 3. *On a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}\text{om}(\Lambda', \Lambda'') \longrightarrow \mathcal{H}\text{om}(F', F'') \longrightarrow \mathcal{H}\text{om}(\Gamma', H^0(F'')/\Gamma'') \longrightarrow \text{Ext}^1(\Lambda', \Lambda'') \longrightarrow \text{Ext}^1(F', F'') \longrightarrow \mathcal{H}\text{om}(\Gamma', H^1(F'')) \longrightarrow \dots$$

Preuve Voir [He]. ■

Etant donnés deux systèmes algébriques Λ' et Λ'' , l'espace vectoriel $\text{Ext}^1(\Lambda'', \Lambda')$ s'interprète, comme dans le cas des faisceaux cohérents, comme espace paramétrant les classes d'extensions

$$0 \longrightarrow \Lambda' \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Lambda'' \longrightarrow 0$$

Nous utiliserons ce point de vue à de nombreuses reprises.

Venons en à la notion de famille de systèmes algébriques paramétrée et plate sur une variété algébrique. Nous supposons que $(X, \mathcal{O}_X(1))$ est une surface projective complexe polarisée, et que S est une variété algébrique connexe. Nous notons $p : S \times X \longrightarrow S$ la projection sur le premier facteur pour toute variété S .

Définition 12. *Une famille **paramétrée** par (et **plate** sur) S de systèmes algébriques est la donnée d'un triplet (Γ, i, \mathbf{F}) tel que \mathbf{F} soit un faisceau de $\mathcal{O}_{S \times X}$ -modules (qui soit \mathcal{O}_S -plat), tel que Γ soit un faisceau de \mathcal{O}_S -modules (plat), et tel que $i : \Gamma \longrightarrow p_*(\mathbf{F})$ soit un morphisme de faisceaux de \mathcal{O}_S -modules.*

*Une famille **paramétrée** par (et **plate** sur) S de systèmes cohérents est une famille paramétrée (et plate) de systèmes algébriques sur S telle Γ et \mathbf{F} soient des faisceaux cohérents, et telle que pour tout point $s \in S$, l'application naturelle $\Gamma_s \longrightarrow H^0(\mathbf{F}_s)$ soit injective.*

On emploiera parfois dans la suite l'expression "**système cohérent sur S** " ou "**système algébrique sur S** " pour parler d'une famille de systèmes cohérents ou algébriques paramétrée par S au sens précédent. On remarque que dans la définition de platitude de système cohérent sur S le faisceau Γ est automatiquement localement libre, et pour chaque point fermé $s \in S$, le système algébrique induit $(\Gamma_s, i_s, \mathbf{F}_s)$ est un système cohérent.

Définition 13. *Soit $g : S' \longrightarrow S$ un morphisme de schémas, l'**image réciproque** $g^*\Lambda$ d'une famille Λ d'une famille de systèmes algébriques ou cohérents paramétrée par S désigne la famille paramétrée par S' définie par le triplet $(g^*\Gamma, g^*i, g^*\mathbf{F})$.*

En particulier quand g est un plongement on parle plus simplement de famille **restreinte** à S' . Si L est un fibré inversible sur S , la famille de systèmes algébriques notée $L \otimes \Lambda$ est définie comme $(L \otimes \Gamma, L \otimes i, L \otimes \mathbf{F})$.

On dégage facilement la notion de morphisme de familles de systèmes algébriques, ainsi que la définition du faisceau $\underline{\mathcal{H}om}_p(,)$ de \mathcal{O}_S -modules qui à un ouvert $U \subseteq S$ associe le $\mathcal{O}_S(U)$ -module des morphismes de familles restreintes à U . On montre à nouveau que la catégorie des familles de systèmes algébriques paramétrées par S est une catégorie abélienne avec assez d'injectifs, dans laquelle se plonge la catégorie additive des familles de systèmes cohérents.

Définition 14. *Etant données deux familles Λ' et Λ'' de systèmes cohérents paramétrées par S , pour tout entier $i \geq 0$ le faisceau cohérent $\underline{\mathcal{E}xt}_p^i(\Lambda', \Lambda'')$ sur S est le i -ème foncteur dérivé du foncteur $\underline{\mathcal{H}om}_p(,)$ appliqué à Λ' et Λ'' .*

Nous utiliserons ces faisceaux pour décrire des faisceaux conormaux et des faisceaux tangents à des sous-schémas d'espaces de modules de systèmes cohérents.

Comme rappelé juste après le théorème 5 la notion de platitude d'une famille est une notion essentielle pour parler de la propriété d'espace de modules grossier. Plus exactement, si $\alpha \in K(X)_{\mathbb{Q}}^+$, et $\mathcal{S}_\alpha(c, k)$ est l'espace de modules des systèmes cohérents (Γ, Θ) sur X , avec $c(\Theta) = c$ et Γ de dimension k , alors la propriété de module grossier de $\mathcal{S}_\alpha(c, k)$ implique la propriété suivante: pour tout schéma S de type fini et toute famille Λ de systèmes cohérents de type (c, k) , paramétrée par S et plate sur S , il existe un morphisme de schémas

$$f_S : S \longrightarrow \mathcal{S}_\alpha(c, k)$$

qui à un point s de S associe la classe du système cohérent paramétré en s .

Le théorème suivant explicite l'espace tangent à l'espace de module en un point α -stable, et donne une description locale de ce schéma au voisinage d'un tel point.

Théorème 9. *Soit $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ un système cohérent α -stable définissant un point p de l'espace de modules \mathcal{S}_α . Alors l'espace tangent en p est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathcal{E}xt^1(\Lambda, \Lambda)$; de plus la variété \mathcal{S}_α est lisse en ce point si et seulement si $\mathcal{E}xt^2(\Lambda, \Lambda) = 0$.*

De plus au voisinage de p le schéma (\mathcal{S}_α, p) se plonge dans une variété lisse (V, p) d'espace tangent de Zariski $\mathcal{E}xt^1(\Lambda, \Lambda)$, et l'idéal J de ce plongement est engendré par $\dim \mathcal{E}xt^2(\Lambda, \Lambda)$ équations, de différentielles nulles en p .

Preuve Voir [He] Th. 3.12 et 3.13. On peut donner une preuve (très rapide) du premier énoncé en disant qu'on connaît l'espace tangent au schéma de Hilbert des quotients V en un point au dessus de Λ (voir paragraphe 3.1), et qu'on a un critère connu de lissité de V en un tel point. Il suffit ensuite d'utiliser que sur l'ouvert de V^{ss} des points représentant des classes de systèmes cohérents stables, l'action de $GL(H)$ est libre. ■

Pour tout système cohérent Λ plat sur S , il existe en tout point $s \in S$ un morphisme dit de **Kodaira-Spencer**

$$\omega_s : T_s S \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\Lambda_s, \Lambda_s)$$

La construction de ω_s est classique (voir [L1]): un vecteur tangent dans $T_s S$ s'interprète comme un morphisme $t : D \longrightarrow S$ où $D = \text{Spec}(\mathbb{C}[\epsilon]/\epsilon^2)$ envoyant le point fermé de D sur s ; soit I l'idéal du point fermé de D , de la suite exacte canonique $0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathbb{C}[\epsilon]/\epsilon^2 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0$ on déduit la suite exacte image réciproque

$$0 \longrightarrow \Lambda_s \longrightarrow t^*(\Lambda) \longrightarrow \Lambda_s \longrightarrow 0$$

A la lumière du théorème précédent, lorsque Λ paramètre en s un système cohérent stable, le morphisme ω_s n'est autre que la différentielle du morphisme modulaire f_S en s .

3.4. Valeurs critiques du paramètre. Revenons au cas où $X = \mathbf{P}_2$, $n \geq 4$ est un entier et $\alpha > 0$ est un nombre rationnel. Dans ce paragraphe nous abordons l'étude des espaces de modules \mathcal{S}_α , considérées comme formant une famille - au sens ensembliste - de variétés dépendantes de α .

Définition 15. On dit que α est **critique** si et seulement si pour tout $\beta > \alpha$ rationnel, il existe un système cohérent α -semi-stable mais non β -semi-stable.

On pourrait objecter qu'on peut définir une valeur critique à l'aide des valeurs inférieures $\beta < \alpha$. Ceci est en fait équivalent, ainsi que la prochaine proposition le montre. Notons d'abord que si α est égal à $\frac{n}{2} - k$, avec $1 \leq k < \frac{n}{2}$ un entier, alors α est critique au sens de la définition 15. En effet un système cohérent $(\Gamma, \mathcal{O}_{\Gamma'}(\frac{n}{2} - \alpha)) \oplus (0, \mathcal{O}_{\Gamma''}(\frac{n}{2} + \alpha))$, avec Γ de dimension 2, est α -semi-stable mais n'est pas β -semi-stable pour $\beta > \alpha$.

Proposition 4. Les valeurs critiques de α sont les rationnels de la forme $\frac{n}{2} - k$, avec $1 \leq k < \frac{n}{2}$ un entier.

Preuve Si $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ n'est pas β -semi-stable il existe un sous-faisceau $\Theta' \subset \Theta$ de multiplicité 1, tel que en posant $\Gamma' = \Gamma \cap H^0(\Theta')$ on ait:

$$\beta(1 - \dim \Gamma') < \chi(\Theta') - \frac{n}{2} - 1$$

On a toujours $\alpha(1 - \dim \Gamma') \geq \chi(\Theta') - \frac{n}{2} - 1$, de sorte que si $\beta > \alpha$ on a $\dim \Gamma' = 2$. Choissant β tel que $\beta - \alpha < \frac{1}{2}$, on en déduit l'existence d'un sous-système cohérent $\Lambda' = (\Gamma', \Theta')$ de Λ (c'est-à-dire un sous-objet dans la catégorie abélienne des systèmes algébriques) tel que: $\dim \Gamma' = 2$ et $\chi(\Theta') = \frac{n}{2} - \alpha + 1$. Ceci impose que $\frac{n}{2} - \alpha$ est entier et ≥ 1 . Avec l'observation précédant la proposition on peut conclure. ■

Les systèmes cohérents α -semi-stables mais β -instables exhibés dans la preuve sont aussi instables pour un paramètre $0 < \gamma < \alpha$. Ceci montre que la définition 15 avec des valeurs inférieures du paramètre donnent les mêmes valeurs critiques. Il résulte de ce qui précède le corollaire suivant.

Corollaire 1. Le nombre rationnel α ne prend qu'un nombre fini de valeurs critiques $\alpha_i = \frac{n}{2} - i$ pour $1 \leq i < \frac{n}{2}$ entier, et pour α compris entre deux valeurs critiques consécutives α_i et α_{i+1} la classe d'isomorphisme de la variété \mathcal{S}_α reste constante.

Preuve En effet entre deux valeurs critiques consécutives la condition de α -semi-stabilité est indépendante de α . ■

D'autre part si α_-, α_+ sont des nombres rationnels positifs tels que $\alpha - 1 < \alpha_- < \alpha < \alpha_+ < \alpha + 1$, avec α critique, on montre facilement que tout système cohérent α_- ou α_+ -semi-stable est α -semi-stable. On a deux morphismes birationnels de variétés algébriques

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{\alpha_-} & & \mathcal{S}_{\alpha_+} \\ & \searrow \pi_- & \swarrow \pi_+ \\ & \mathcal{S}_\alpha & \end{array}$$

qui ont des sections rationnelles $\mathcal{S}_\alpha - - > \mathcal{S}_{\alpha+/-}$ dont le lieu d'indétermination est celui des points de \mathcal{S}_α correspondant aux classes de S-équivalence $\Lambda' \oplus \Lambda''$ où $\Lambda' = (\Gamma, \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2} - \alpha))$ et $\Lambda'' = (0, \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2} + \alpha))$. C'est donc un sous-schéma fermé de \mathcal{S}_α .

Définition 16. On note Σ^α le sous-schéma fermé réduit de \mathcal{S}_α des classes de systèmes cohérents α -semi-stables mais non β -stables pour $\beta > \alpha$.

On a alors la proposition suivante. On pose $\Sigma = \Sigma^\alpha$, et D la variété d'incidence

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{q} & \mathbf{P}_2 \\ p \downarrow & & \\ \mathbf{P}_2^* & & \end{array}$$

dont les points paramètrent les couples (l, x) où l est une droite et x un point sur l ; lorsque l'on a affaire au produit $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$, on note D_1 (resp. D_2) les sous-variétés d'incidence contenues dans $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2$ relatives au premier (resp. second) facteur.

Définition 17. On note G la grassmannienne relative $\text{Grass}(2, p_*\mathcal{O}_D(\frac{n}{2} - \alpha)) \rightarrow \mathbf{P}_2^*$, dont les points paramètrent les sous-espaces $\Gamma \subset H^0(\mathcal{O}_l(\frac{n}{2} - \alpha))$ de rang 2, où l est une droite de \mathbf{P}_2 .

On peut décrire explicitement Σ . Remarquons que la variété $G \times \mathbf{P}_2^*$ paramètre une famille plate de systèmes cohérents α -semi-stables, à savoir la famille $\Lambda' \oplus \Lambda''$ où $\Lambda' = (\Gamma, \mathcal{O}_{D_1}(\frac{n}{2} - \alpha))$, $\Lambda'' = (0, \mathcal{O}_{D_2}(\frac{n}{2} + \alpha))$ et Γ est le sous-fibré tautologique de rang 2 sur G . D'après ce qui précède il existe un morphisme $\phi : G \times \mathbf{P}_2^* \rightarrow \mathcal{S}_\alpha$ dont l'image est Σ , et ce morphisme est bijectif.

Proposition 5. Le sous-schéma Σ est isomorphe à $G \times \mathbf{P}_2^*$.

Preuve Nous allons montrer que ϕ est un plongement. Soit V le schéma produit introduit au paragraphe 3.1, dont un ouvert V^{ss} donne par quotient l'espace de modules \mathcal{S}_α . Le schéma V^{ss} paramètre une famille plate de systèmes cohérents Λ qui sont α -semi-stables. Soit d la classe dans $K(\mathbf{P}_2)$ égale à $h + (\frac{n}{2} + \alpha)h^2$, autrement dit celle des faisceaux $\mathcal{O}_l(\frac{n}{2} + \alpha)$, et $\text{Quot}^d(\Lambda)$ le schéma dont les points paramètrent les morphismes surjectifs de systèmes cohérents

$$(\Gamma, \Theta) \rightarrow (0, \mathcal{O}_l(\frac{n}{2} + \alpha))$$

où (Γ, Θ) est α -semi-stable. En d'autres termes le morphisme de faisceaux $\Theta \rightarrow \mathcal{O}_l(\frac{n}{2} + \alpha)$ est surjectif, et l'application induite $\Gamma \rightarrow H^0(\mathcal{O}_l(\frac{n}{2} + \alpha))$ est nulle. Il existe un morphisme naturel $i : \text{Quot}^d(\Lambda) \rightarrow V^{ss}$, et on a également une action naturelle de $GL(H)$ sur $\text{Quot}^d(\Lambda)$ pour laquelle i est équivariant. Un point de $\text{Quot}^d(\Lambda)$ paramètre une suite exacte au sens des systèmes algébriques

$$0 \rightarrow \Lambda' \rightarrow \Lambda \rightarrow \Lambda'' \rightarrow 0 \quad (+)$$

avec $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$, $\Lambda' = (\Gamma, \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2} - \alpha))$ et $\Lambda'' = (0, \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2} + \alpha))$, et globalement il existe une suite exacte de systèmes cohérents sur $\text{Quot}^d(\Lambda)$ donnée par

$$0 \rightarrow (\Gamma, \Theta') \rightarrow i^*(\Lambda) \rightarrow (0, \Theta'') \rightarrow 0 \quad (*)$$

Maintenant la fibre du morphisme i au dessus d'un point de V^{ss} qui paramètre un système cohérent Λ a pour espace tangent $\mathcal{H}\text{om}(\Lambda', \Lambda'')$ avec les notations de (+). Il est donc nul, la fibre est finie et réduite, et i est une immersion fermée car étant donné un système cohérent $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$, il existe au plus une suite exacte du type (+) à scalaire près.

Considérons à présent le schéma $\text{Quot}_{red}^d(\Lambda)$ muni de sa structure **réduite**, il se plonge donc dans V^{ss} . Soit F une quelconque de ses composantes irréductibles. On a un diagramme commutatif de variétés algébriques (sauf éventuellement le schéma en haut à droite)

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & V^{ss} \\ j \downarrow & & \downarrow // \\ G \times \mathbf{P}_2^* & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{S}_\alpha \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche associe à un quotient de Λ les deux droites supports de $\mathcal{O}_{l'}$ et $\mathcal{O}_{l''}$, et le sous-espace $\Gamma \subset H^0(\mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2} - \alpha))$.

Pour justifier rigoureusement l'existence de j on procède comme suit: le faisceau Θ'' dans (*) est par hypothèse plat sur F , de dimension relative 1. Il est facile de voir qu'il existe une résolution de Θ'' à deux termes du type

$$0 \longrightarrow H_1 \longrightarrow H_0 \longrightarrow \Theta'' \longrightarrow 0$$

où H_0, H_1 sont des fibrés vectoriels sur F de même rang. En effet si $p : F \times \mathbf{P}_2 \longrightarrow F$ est la première projection le faisceau cohérent $p_*(\Theta'')$ est localement libre d'après le théorème des images directes de Grauert (voir [Ha] III.12.9 qui s'applique car F est intègre), et on a un morphisme surjectif d'évaluation $p^*(p_*(\Theta'')) \longrightarrow \Theta''$ dont le noyau est localement libre d'après le même théorème.

On peut donc prendre le déterminant $\det(\Theta'')$, qui est un fibré inversible sur $F \times \mathbf{P}_2$ dont la restriction à chaque fibre au dessus d'un point de F définit un fibré inversible de classe constante dans $\text{Pic}(\mathbf{P}_2)$, qui est $\mathcal{O}(1)$. On procède de même pour Θ' et par hypothèse le fibré Γ s'injecte dans $p_*(\Theta')$. La propriété universelle de la grassmannienne achève de justifier l'existence de j .

Maintenant quand on passe au quotient par l'action de $GL(H)$, l'image de F se plonge dans \mathcal{S}_α et se factorise par le morphisme $\phi : G \times \mathbf{P}_2^* \longrightarrow \mathcal{S}_\alpha$. Comme on peut choisir F dominant $G \times \mathbf{P}_2^*$ on peut conclure. ■

Il n'est en fait pas difficile de voir que le schéma $\text{Quot}^d(\Lambda)$ de la preuve ci-dessus est irréductible. En effet les fibres du morphisme de passage au quotient $// : V^{ss} \longrightarrow \mathcal{S}_\alpha$ au dessus des points de Σ sont toutes isomorphes à un même quotient de $GL(H)$ qui est irréductible.

On poursuit notre étude du comportement des espaces de modules au voisinage d'une valeur critique avec la définition suivante.

Définition 18. Soit α critique. On note Σ_-^α le fermé (muni de sa structure de schéma **réduit**) des points de \mathcal{S}_{α_-} d'image contenue dans Σ^α par le morphisme naturel $\mathcal{S}_{\alpha_-} \longrightarrow \mathcal{S}_\alpha$.

On fixe la valeur critique α , et on pose $\Sigma^\alpha = \Sigma$ et $\Sigma_- = \Sigma_-^\alpha$. On s'intéresse donc à des classes de systèmes cohérents α_- -semi-stables $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ admettant une filtration dont les gradués sont du type $\Lambda' = (\Gamma, \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2} - \alpha))$ et $\Lambda'' = (0, \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2} + \alpha))$. L'hypothèse de α_- -semi-stabilité entraîne l'existence d'une extension **non scindée** de systèmes cohérents

$$0 \longrightarrow \Lambda' \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Lambda'' \longrightarrow 0 \quad (*)$$

Réciproquement, une telle extension non scindée définit un système cohérent Λ qui est α_- -semi-stable, et dont la classe est dans Σ_- . Il est facile de voir que l'on décrit ainsi tous les systèmes

cohérents α_- –semi-stables mais α_+ –instables. Les droites l', l'' étant fixées, ainsi que le sous-espace Γ , les extensions de type (*) sont paramétrées par l'espace projectif $\mathbf{P}(\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{l''}(2\alpha), \mathcal{O}_{l'}))$.

Définition 19. On note \mathcal{J} le faisceau d'idéaux du fermé image réciproque de la sous-variété diagonale $\mathbf{P}_2^* \subset \mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$ par la projection naturelle $\Sigma \longrightarrow \mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$.

On désigne par $\mathbb{P}(E)$ la fibration au sens de Grothendieck, paramétrant les quotients de rang 1 des fibres d'un faisceau cohérent E . Rappelons que ce schéma (projectif sur sa base), est défini comme $\text{Proj}(\oplus_{l \geq 0} S^l E)$ lorsque E est localement libre. Dans le cas général pour avoir une interprétation géométrique concrète de $\mathbb{P}(E)$ il faut écrire une présentation de E par des faisceaux localement libres.

Proposition 6. Pour $\alpha \geq 1$ critique on a un isomorphisme canonique

$$\Sigma_- \simeq \mathbb{P}(\mathcal{J}^{2\alpha-2}(2\alpha-1, 2\alpha-2))$$

Pour $\alpha = 1/2$ on a un isomorphisme canonique $\Sigma_- \simeq \Sigma$, de même que pour $\alpha = 1$. Pour $\alpha = 3/2$ le schéma Σ_- est isomorphe à l'éclaté de Σ le long de l'idéal \mathcal{J} .

Preuve Soient à nouveau Λ' et Λ'' les familles plates paramétrées par $\Sigma = G \times \mathbf{P}_2^*$ introduites avant l'énoncé de la proposition 5. On note de plus τ_1, τ_2 les faisceaux sur $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$ images réciproques de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(1)$ par la première et seconde projection.

Le faisceau cohérent $\underline{\text{Ext}}_p^1(\Lambda'', \Lambda')$ sur Σ est isomorphe à $\mathcal{E} = \underline{\text{Ext}}_p^1(\mathcal{O}_{D_2}(2\alpha), \mathcal{O}_{D_1})$, et ses sous-espaces de rang 1 paramètrent les classes d'extensions (*). Posons $\mathcal{F} = \underline{\text{Ext}}_p^1(\mathcal{O}_{D_1}, \mathcal{O}_{D_2}(2\alpha-3))$, on a $\mathcal{F}^\vee \simeq \mathcal{E}$. Sur le schéma $\mathbb{P}(\mathcal{F})$, le quotient $\pi^*(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1)$, où $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{F}) \longrightarrow \Sigma$ est la projection naturelle, donne une section partout non nulle du faisceau $\pi^*(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1)$, et par conséquent une extension canonique de familles de systèmes cohérents

$$0 \longrightarrow (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1) \otimes \Lambda, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1) \otimes \mathcal{O}_{D_1}(\frac{n}{2} - \alpha)) \longrightarrow \Lambda \longrightarrow (0, \mathcal{O}_{D_2}(\frac{n}{2} + \alpha)) \longrightarrow 0$$

La famille Λ étant plate sur sa base $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ on obtient un morphisme

$$\sigma : \mathbb{P}(\mathcal{F}) \longrightarrow S_{\alpha_-}$$

qui est bijectif sur son image, qui ensemblistement est Σ_- . En effet tout point de Σ_- correspond à une unique extension de type (*) à multiplication par un scalaire près. On doit donc tout d'abord identifier le faisceau \mathcal{F} .

De la présentation du $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*}$ –module cohérent \mathcal{O}_D donné par

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(-1) \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

on déduit la suite exacte longue:

$$p_* \mathcal{O}_{D_2}(2\alpha-3) \longrightarrow \tau_1 \otimes p_* \mathcal{O}_{D_2}(2\alpha-2) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow R^1 p_* \mathcal{O}_{D_2}(2\alpha-3) \longrightarrow 0$$

Lorsque $\alpha = 1/2$ on a $\mathcal{F} \simeq \tau_2^*$. Dans ce cas dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \Sigma_- \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \Sigma \end{array}$$

la flèche oblique est un isomorphisme, la flèche horizontale est surjective, on peut donc conclure. Quand $\alpha \geq 1$, on obtient la présentation suivante de \mathcal{F}

$$0 \boxtimes S^{2\alpha-3}Q \longrightarrow \tau_1 \boxtimes S^{2\alpha-2}Q \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0 \quad (1)$$

où Q est le fibré tautologique de rang 2 sur \mathbf{P}_2^* . La flèche de gauche dans la suite exacte ci-dessus est à torsion près la multiplication par la section canonique définissant la diagonale dans $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$. On vérifie donc facilement que

$$\mathcal{F} \simeq \mathcal{J}^{2\alpha-2}(2\alpha-1, 2\alpha-2)$$

Il reste à montrer que le morphisme $\mathbb{P}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{S}_{\alpha-}$ est un plongement.

Lemme 3. *Le schéma $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ est réduit.*

Preuve Comme on l'a vu ci-dessus $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ un sous-schéma fermé du fibré projectif $\mathbb{P}(\tau_1 \boxtimes S^{2\alpha-2}Q)$ sur $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$. On recouvre $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$ par des ouverts isomorphes à $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2$ tels que la restriction de l'espace total du fibré projectif $\mathbb{P}(\tau_1 \boxtimes S^{2\alpha-2}Q)$ à chaque ouvert du recouvrement soit isomorphe à $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^{2\alpha-1}$. Il suffit donc de montrer que la restriction du sous-schéma fermé $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ à chacun de ces ouverts affines est défini par un idéal d'un anneau de polynômes à $2\alpha+3$ variables sans éléments nilpotents. D'après la suite exacte (1), on sait qu'il existe une base de $\mathbf{C}^{2\alpha-1}$ formée de monômes telle que si $(f_0, \dots, f_{2\alpha-2})$ désigne le système de coordonnées affines correspondant les équations qui définissent le sous-schéma soient

$$(x_0 - x_1)f_{k-1} + (y_0 - y_1)f_k, \quad 1 \leq k \leq 2\alpha - 2$$

où (x_0, y_0) et (x_1, y_1) sont les deux systèmes de coordonnées affines sur chaque facteur \mathbf{C}^2 . Comme les formes linéaires $x_0 - x_1$ et $y_0 - y_1$ sur $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2$ sont indépendantes, il revient au même de montrer que l'algèbre quotient

$$\mathcal{A} := \mathbf{C}[x, y, f_0, \dots, f_k] / \langle x f_{i-1} - y f_i, 1 \leq i \leq k \rangle$$

où $k = 2\alpha - 2$ est sans élément nilpotent. Pour cela on ordonne les monômes en (f_0, \dots, f_k) selon l'ordre lexicographique avec de plus la convention $f_0 < f_1 < \dots < f_k$. Chaque élément de \mathcal{A} s'écrit de manière unique sous la forme

$$\rho(x, y) + \sum_{\substack{m_0 + \dots + m_{k-1} \geq 1 \\ m_k \geq 0}} \sigma_{m_0, \dots, m_k}(y) f_0^{m_0} \dots f_k^{m_k} + \sum_{l \geq 1} \tau_l(x, y) f_k^l$$

où les ρ, σ, τ sont des polynômes. Si l'élément est non nul il existe un terme non nul de plus petit ordre dans cette écriture; s'il est de plus nilpotent le polynôme en y ou en (x, y) devant ce monôme de plus petit ordre est lui-même nilpotent, ce qui est absurde car on a une inclusion canonique $\mathbf{C}[x, y] \subset \mathcal{A}$. ■

On achève maintenant la preuve de la proposition 6. D'après ce qui précède on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{S}_{\alpha-} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{S}_{\alpha} \end{array}$$

où la flèche du bas est un plongement d'après la proposition 5. Soit x un point de $\mathbb{P}(\mathcal{F})$, et paramétrant une extension $u : 0 \longrightarrow \Lambda' \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Lambda'' \longrightarrow 0$. Soit v un vecteur tangent en x . Supposons

que $d\sigma_x(v) = 0$; alors l'image de v par la différentielle de la projection $\mathbb{P}(\mathcal{F}) \rightarrow \Sigma$ est également nulle. Mais le noyau de cette différentielle est l'espace tangent à la fibre de cette projection, qui est isomorphe au quotient $\mathcal{E}xt^1(\Lambda'', \Lambda')/(u)$. La différentielle de σ restreinte à l'espace tangent à la fibre s'identifie à la projection canonique

$$\mathcal{E}xt^1(\Lambda'', \Lambda')/(u) \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\Lambda, \Lambda)$$

déduite de la suite exacte u . En effet au paragraphe 3.3 on a rappelé que la différentielle de σ s'identifiait au morphisme de déformation de Kodaira-Spencer, dont on a donné la construction. On a d'autre part la suite exacte

$$\mathcal{H}om(\Lambda'', \Lambda'') \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\Lambda'', \Lambda') \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\Lambda'', \Lambda)$$

où l'image de la flèche de gauche est (u) . Enfin il est clair que le morphisme $\mathcal{E}xt^1(\Lambda'', \Lambda) \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\Lambda, \Lambda)$ est injectif, ce qui entraîne finalement que v est nul. Le morphisme σ est donc injectif, non ramifié, d'image réduite. La proposition s'ensuit. ■

Le sous-schéma Σ_- n'est en général pas intègre, ce qui justifie que l'on ne puisse le décrire à l'aide d'un fibré associé à un fibré vectoriel sur Σ . Plus exactement on a la proposition suivante.

Proposition 7. *Lorsque $\alpha > 0$ est valeur critique et inférieure à $3/2$, le sous-schéma Σ_- est une variété irréductible de dimension $n - 2\alpha + 2$. Lorsque $\alpha \geq 2$, la variété Σ_- possède deux composantes irréductibles, que nous notons A et B . La variété A est de dimension $n - 2\alpha + 2$ et isomorphe à l'éclaté de Σ le long du fermé d'idéal $\mathcal{J}^{2\alpha-2}$, la variété B est de dimension $n - 2$ et isomorphe au changement de base du fibré projectif $\mathbf{P}(S^{2\alpha-2}Q) \rightarrow \mathbf{P}_2^*$ par la projection naturelle $G \rightarrow \mathbf{P}_2^*$.*

Preuve Lorsque $\alpha \geq 1$, le morphisme canonique de faisceaux quasi-cohérents d'algèbres $\oplus S^*\mathcal{J}^{2\alpha-2} \rightarrow \oplus \mathcal{J}^{*(2\alpha-2)}$, qui est surjectif, donne une immersion de la variété A de l'énoncé dans Σ_- . L'image réciproque du fermé d'idéal \mathcal{J} par le morphisme naturel $\Sigma_- \rightarrow \Sigma$ est isomorphe au fibré en espaces projectifs sur G donné par $\mathbb{P}(\mathcal{J}^{2\alpha-2}/\mathcal{J}^{2\alpha-1})$. Comme on a $\mathcal{J}^{2\alpha-2}/\mathcal{J}^{2\alpha-1} \simeq S^{2\alpha-2}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$. Lorsque $\alpha = 3/2$, on voit que Σ_- est intègre isomorphe à l'éclaté de G le long de l'idéal \mathcal{J} . Lorsque $\alpha \geq 2$, on obtient les deux composantes irréductibles de l'énoncé. ■

Définition 20. *Soit α une valeur critique. On note Σ_+^α le fermé des points de $\mathcal{S}_{\alpha+}$ dont l'image par la projection $\mathcal{S}_{\alpha+} \rightarrow \mathcal{S}_\alpha$ appartient au fermé Σ^α .*

La valeur critique α étant fixée, on note dans la suite $\Sigma_+ = \Sigma_+^\alpha$. La propriété de α_+ -semi-stabilité permet d'affirmer que de tels systèmes cohérents Λ s'insèrent dans une suite exacte **non scindée** de systèmes cohérents

$$0 \rightarrow \Lambda'' \rightarrow \Lambda \rightarrow \Lambda' \rightarrow 0 \quad (+)$$

avec $\Lambda' = (\Gamma, \mathcal{O}_{\Gamma'}(\frac{n}{2} - \alpha))$, $\Lambda'' = (0, \mathcal{O}_{\Gamma''}(\frac{n}{2} + \alpha))$. Réciproquement, toute extension non scindée de ce type est α_+ -semi-stable et définit un point de Σ_+ . De plus on décrit ainsi tous les systèmes cohérents α_+ -semi-stables mais α_- -instables. Les droites l', l'' étant fixées, ainsi que le sous-espace Γ , les extensions de type (+) sont paramétrées par l'espace vectoriel $\mathbf{P}(\mathcal{E}xt^1(\Lambda', \Lambda''))$.

Proposition 8. *Soient Λ' et Λ'' les familles de systèmes cohérents paramétrées par Σ utilisées à la proposition 5. Alors le fermé Σ_+ , muni de sa structure réduite, est isomorphe au fibré projectif $\mathbf{P}(\underline{\mathcal{E}xt}_p^1(\Lambda', \Lambda''))$, qui est localement libre de rang $n + 2\alpha + 2$. La variété Σ_+ est donc intègre de dimension $2n + 4$.*

Preuve La démonstration consiste d'abord à montrer que le faisceau $\underline{\text{Ext}}_p^1(\Lambda', \Lambda'')$ est localement libre sur Σ de rang $n + 2\alpha + 3$. C'est une application de la prop. 1.5 de [He]. Puis on montre par des arguments connus qu'il existe un morphisme canonique $\mathbf{P}(\underline{\text{Ext}}_p^1(\Lambda', \Lambda'')) \rightarrow \Sigma_+$ qui est un plongement. ■

4. FIBRÉS DÉTERMINANTS ET PASSAGES DE VALEURS CRITIQUES

Dans cette section, nous posons les notations suivantes: $n \geq 4$ est un entier, $\alpha > 0$ est un nombre rationnel, qui est une valeur critique au sens de la définition 15. On fixe deux valeurs critiques α_-, α_+ , proches de α et telles que $\alpha_- < \alpha < \alpha_+$. On pose $\Sigma = \Sigma^\alpha$, $\Sigma_- = \Sigma_-^\alpha$, $\Sigma_+ = \Sigma_+^\alpha$.

Nous cherchons à calculer pour $\alpha > \frac{n}{2} - 1$, le nombre d'intersection

$$c_1(\gamma^* \mathcal{O}(1))^{2n+5} \cap [\mathcal{S}_\alpha]$$

où $\gamma : \mathcal{S}_\alpha \rightarrow |\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(n)|$ est la composée du morphisme naturel $\pi : \mathcal{S}_\alpha \rightarrow \mathcal{M}_n$ est du morphisme de Barth $\beta : \mathcal{M}_n \rightarrow |\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(n)|$.

4.1. Fibrés déterminants sur les espaces de modules. On conserve les notations du paragraphe précédent.

Définition 21. On nomme le fibré inversible $\beta^*(\mathcal{O}(1))$ sur \mathcal{M}_n le fibré **déterminant** de Donaldson et on le note \mathcal{D} .

Dans [L3] l'auteur énonce la construction de \mathcal{D} en termes de K-théorie. Le principe est le suivant: prenons la classe $-d \in K(\mathbf{P}_2)$ définie comme celle du faisceau $\mathcal{O}_l(-1)$, où l est une droite. Une telle classe n'est pas choisie arbitrairement: elle est orthogonale à la classe $c = 2 - nh^2$ pour la forme quadratique \langle, \rangle introduite à la section 2.1. Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent **universel** sur $W \times \mathbf{P}_2$, où W est une variété quasi-projective qui par quotient par l'action d'un groupe linéaire donne \mathcal{M}_n . Par universel on entend plat sur W , et on suppose que les faisceaux paramétrés par \mathcal{F} aux points de W décrivent toutes les classes de S-équivalence de faisceaux semi-stables de classe c . La construction de W et \mathcal{F} est classique et fait intervenir un schéma des quotients.

Notons p, q les projections de $W \times \mathbf{P}_2$ sur les premier et second facteurs. Alors on pose sur W le fibré inversible $\det(Rp_!(\mathcal{F} \cdot q^*d))$. La classe q^*d est l'image réciproque de d par le morphisme plat q , le produit $\mathcal{F} \cdot q^*d$ est le produit de K-théorie de la classe de \mathcal{F} avec q^*d , et $p_!$ associe à la classe d'un faisceau cohérent sur $W \times \mathbf{P}_2$ la somme alternée des classes de ses images directes supérieures $R^i p_*$. Enfin \det est le déterminant. Il doit être précisé que ces définitions sont licites car on montre que l'on travaille toujours avec des sommes de classes de faisceaux admettant des résolutions localement libres **finies**. Maintenant la propriété d'orthogonalité de c et d entraîne que le fibré ainsi défini se descend sur le quotient \mathcal{M}_n ; en effet le stabilisateur en un point d'orbite **fermée** opère trivialement sur la fibre, et le lemme de Kempf-Drezet-Narasimhan permet de conclure (voir [DN]). Un théorème dû à Drezet (voir [L] ou [L3] Th 3.10) montre que tout fibré inversible sur \mathcal{M}_n s'obtient ainsi à l'aide d'une classe d orthogonale à c . Ces fibrés inversibles vérifient tous une propriété universelle identique, et que nous écrivons pour \mathcal{D} .

Théorème 10. Soit un schéma S et un faisceau cohérent \mathcal{F} sur $S \times \mathbf{P}_2$, plat sur S et paramétrant des faisceaux semi-stables de classe $c = 2 - nh^2$, et soit $f : S \rightarrow \mathcal{M}_n$ le morphisme modulaire associé; alors le fibré inversible sur S défini par $\det(Rp_!(\mathcal{F} \cdot q^*d))$ est image réciproque du fibré déterminant \mathcal{D} par f .

On se propose d'effectuer une construction identique pour les espaces de modules de systèmes cohérents. Soit donc $\alpha > 0$ un nombre rationnel, et soit un espace de paramètres V sur lequel agit un groupe $GL(H)$ et dont le bon quotient d'un ouvert V^{ss} donne l'espace de modules \mathcal{S}_α (voir section 3.1). La variété V^{ss} paramètre une famille plate de systèmes cohérents $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$. Utilisant les mêmes notations que ci-dessus, on pose alors sur V^{ss} le fibré inversible donné par

$$\det(Rp_!(\Theta \cdot q^*h)) \otimes \det(\Gamma^*) \quad (+)$$

Ce choix non plus n'est pas anodin: on a en effet $\langle \Theta, h \rangle - \dim \Gamma = 0$ pour tout système cohérent (Γ, Θ) tel que $c(\Theta) = 2h + nh^2$ et $\dim \Gamma = 2$. On peut ainsi remarquer que l'expression (+) ne dépend pas du choix de la famille Λ en vertu de [He], lemme 3.5, et du fait que le fermé complémentaire de l'ouvert des points α -stables est de codimension ≥ 2 .

Proposition 9. *Pour α non critique, le fibré inversible défini par (+) se descend sur l'espace de modules, i.e il existe un fibré inversible noté \mathcal{D}_α sur \mathcal{S}_α tel que son image réciproque sur V^{ss} par le morphisme de passage au quotient ait l'expression (+).*

De plus, pour $\alpha > \frac{n}{2} - 1$, on a la relation $\mathcal{D}_\alpha = \pi^*\mathcal{D}$, où $\pi : \mathcal{S}_\alpha \longrightarrow \mathcal{M}_n$ est le morphisme défini au théorème 6.

Preuve Le stabilisateur du groupe $GL(H)$ est isomorphe à \mathbb{C}^* en chaque point de V^{ss} définissant un quotient α -stable. En un tel point $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ l'action d'un scalaire non nul l sur la fibre du fibré inversible défini par (+) est donnée par la multiplication par $l^{\langle \Theta, h \rangle - \dim \Gamma} = 1$. Si maintenant Λ est un point de V^{ss} non α -stable mais d'orbite fermée sous $GL(H)$, on sait qu'il s'écrit $\Lambda = \Lambda' \oplus \Lambda''$ avec $\Lambda' = (\Gamma', \mathcal{O}_{\Gamma'}(\frac{n}{2}))$ et $\Lambda'' = (\Gamma'', \mathcal{O}_{\Gamma''}(\frac{n}{2}))$; les espaces Γ' et Γ'' sont de dimension 1. Alors le stabilisateur en un tel point est soit isomorphe à $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ si $l' \neq l''$, soit isomorphe à $GL(\mathbb{C}^2)$ si $l' = l''$. L'action d'un endomorphisme inversible g de rang 2 est alors: $\det(g)^{\langle \Theta, h \rangle / 2} \cdot \det(g)^{-1} = 1$. Ceci prouve la première partie de la proposition, avec le lemme de Kempf-Drezet-Narasimhan. L'hypothèse α non critique est ici essentielle car si α est critique on peut vérifier que les assertions précédentes sont fausses aux points correspondant aux classes $(\Gamma, \mathcal{O}_{\Gamma'}(\frac{n}{2} - \alpha)) \oplus (0, \mathcal{O}_{\Gamma''}(\frac{n}{2} + \alpha))$.

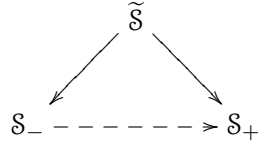
Pour la seconde partie, supposons donc $\alpha > \frac{n}{2} - 1$, et notons que le morphisme d'évaluation $p^*\Gamma \longrightarrow \Theta$ fournit une suite exacte de faisceaux cohérents sur $V^{ss} \times \mathbf{P}_2$

$$0 \longrightarrow p^*\Gamma \longrightarrow \mathcal{F}(1) \longrightarrow \check{\Theta} \longrightarrow 0$$

où par définition $\check{\Theta} = \underline{\text{Ext}}_p^1(\Theta, \mathcal{O})$ et \mathcal{F} est un faisceau plat sur V^{ss} décrivant les faisceaux de Poncet de classe c . D'après la propriété universelle du fibré d'eterminant \mathcal{D} , l'image réciproque sur V^{ss} de \mathcal{D} par le morphisme composé $V^{ss} \longrightarrow \mathcal{S}_\alpha \longrightarrow \mathcal{M}_n$ est donnée par l'expression $\det p_!(\mathcal{F} \cdot q^*d)$ donnée ci-dessus. Ce fibré est donc égal à $\det p_!(\check{\Theta}(-1) \cdot q^*d) \otimes \det \Gamma^*$, qui est encore égal d'après le théorème de dualité relative (voir [H2]) et la définition de $\check{\Theta}$ à l'expression de l'énoncé de la proposition. On peut conclure par passage au quotient. ■

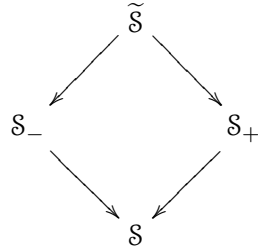
Comme le fibré \mathcal{D} , le fibré \mathcal{D}_α vérifie une propriété universelle qui s'énonce en termes de familles plates de systèmes cohérents. Il est clair également que lorsque α est critique, en dehors des fermés Σ_- et Σ_+ , les fibrés \mathcal{D}_{α_-} et \mathcal{D}_{α_+} se correspondent par l'isomorphisme birationnel $\mathcal{S}_{\alpha_-} \dashrightarrow \mathcal{S}_{\alpha_+}$.

4.2. Eclatements d'espaces de modules. Soit $\alpha > 0$ une valeur critique, et soient $\alpha_- < \alpha < \alpha_+$ des valeurs non critiques du paramètres proches de α . On pose $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\alpha$, $\mathcal{S}_{+/-} = \mathcal{S}_{\alpha_{+/-}}$. Dans ce paragraphe on peut trouver une variété $\tilde{\mathcal{S}}$ munie de deux projections sur \mathcal{S}_- et \mathcal{S}_+ tel que l'on ait un diagramme commutatif



dont les deux flèches obliques sont des morphismes birationnels. Comme on s'y attend, on va éclater les deux variétés $\mathcal{S}_{+/-}$ le long des fermés $\Sigma_{+/-}$.

Théorème 11. *Pour tout $\alpha > 0$ les éclatés de \mathcal{S}_- et \mathcal{S}_+ le long de Σ_- et Σ_+ respectivement sont isomorphes. Notons $\tilde{\mathcal{S}}$ la variété projective obtenue. Pour $\alpha \leq 3/2$ le diagramme*



est cartésien.

La démonstration utilise un lemme.

Lemme 4. *Soit x un point de Σ_- , correspondant à la classe d'un système cohérent Λ s'insérant dans une suite exacte (unique à scalaire près)*

$$0 \longrightarrow \Lambda' \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Lambda'' \longrightarrow 0 \quad (+)$$

où $\Lambda' = (\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma(\frac{n}{2} - \alpha))$, $\Lambda'' = (0, \mathcal{O}_{\Gamma''}(\frac{n}{2} + \alpha))$. On a une suite exacte d'espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow T_x \Sigma_- \longrightarrow T_x \mathcal{S}_- \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\Lambda', \Lambda'')$$

où les deux premiers termes sont des espaces tangents. Lorsque $\alpha \leq 3/2$ la flèche de droite est surjective.

Preuve On sait que le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaira-Spencer $\omega : T_x \mathcal{S}_- \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\Lambda, \Lambda)$ est un isomorphisme. La flèche de droite dans la suite exacte en dessous de (+) s'identifie via ω à la projection canonique $\mathcal{E}xt^1(\Lambda, \Lambda) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\Lambda', \Lambda'')$ déduite de la suite exacte $0 \longrightarrow \Lambda' \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Lambda'' \longrightarrow 0$. On note $\mathcal{E}xt_{+/-}^1(\Lambda, \Lambda)$ les groupes $\mathcal{E}xt$ filtrés relativement à la filtration d'Harder-Narasimhan (Λ', Λ'') de Λ (cf [L] (chap.15.3 ou [DL])). Il existe en particulier une suite exacte longue d' $\mathcal{E}xt$ filtrés dont nous n'écrivons que la séquence qui nous intéresse

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}xt_-^1(\Lambda, \Lambda) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\Lambda, \Lambda) \longrightarrow \mathcal{E}xt_+^1(\Lambda, \Lambda) \quad (*)$$

La flèche $\mathcal{E}xt_-^1(\Lambda, \Lambda) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\Lambda, \Lambda)$ est en effet injective car le groupe $\mathcal{E}xt_+^0(\Lambda, \Lambda) = \mathcal{H}om(\Lambda', \Lambda'')$ est nul. Le lemme 4 est alors conséquence du lemme qui suit. ■

Lemme 5. *La restriction du morphisme de Kodaira-Spencer ω au sous-espace $T_x \Sigma_-$ de $T_x \mathcal{S}_-$ induit un isomorphisme $T_x \Sigma_- \simeq \mathcal{E}xt_-^1(\Lambda, \Lambda)$.*

Preuve Comme $\mathcal{E}xt_{-}^1$ est foncteur dérivé du sous-foncteur du foncteur $\mathcal{H}om$ respectant la filtration, on sait qu'on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} T_x \Sigma_{-} & \hookrightarrow & T_x \mathcal{S}_{-} \\ \omega \downarrow & & \downarrow \omega \\ \mathcal{E}xt_{-}^1(\Lambda, \Lambda) & \hookrightarrow & \mathcal{E}xt^1(\Lambda, \Lambda) \end{array}$$

Il existe d'autre part un isomorphisme canonique $\mathcal{E}xt_{+}^1(\Lambda, \Lambda) \simeq \mathcal{E}xt^1(\Lambda', \Lambda'')$ et la flèche de droite dans (*) s'identifie à l'application linéaire $T_x \mathcal{S}_{-} \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\Lambda', \Lambda'')$. La suite spectrale convergeant vers $\mathcal{E}xt_{-}^1(\Lambda, \Lambda)$ en degré 1 comporte les quatres termes $E_1^{0,0} = \mathcal{H}om(\Lambda', \Lambda') \oplus \mathcal{H}om(\Lambda'', \Lambda'')$, $E_1^{1,0} = \mathcal{E}xt^1(\Lambda'', \Lambda')$, $E_1^{0,1} = \mathcal{E}xt^1(\Lambda', \Lambda') \oplus \mathcal{E}xt^1(\Lambda'', \Lambda'')$, $E_1^{1,1} = \mathcal{E}xt^2(\Lambda'', \Lambda')$. Les autres termes sont nuls. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow E_2^{1,0} \longrightarrow \mathcal{E}xt_{-}^1(\Lambda, \Lambda) \longrightarrow E_2^{0,1} \longrightarrow 0$$

où $E_2^{1,0}$ est le conoyau de l'application $d^{0,0} : \mathcal{H}om(\Lambda', \Lambda') \oplus \mathcal{H}om(\Lambda'', \Lambda'') \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\Lambda'', \Lambda')$, qui est isomorphe à l'espace vectoriel quotient $\mathcal{E}xt^1(\Lambda'', \Lambda')/(u)$, où (u) est la classe de l'extension $(+)$. L'espace vectoriel $E_2^{0,1}$ est un sous-espace de $\mathcal{E}xt^1(\Lambda', \Lambda') \oplus \mathcal{E}xt^1(\Lambda'', \Lambda'')$, qui lui-même s'identifie à $T_{\pi_{-}(x)} \Sigma$. La composée (2) suivante

$$\begin{array}{ccc} T_x \Sigma_{-} & \longrightarrow & \mathcal{E}xt_{-}^1(\Lambda, \Lambda) \\ & \searrow (2) & \downarrow (1) \\ & & \mathcal{E}xt^1(\Lambda', \Lambda') \oplus \mathcal{E}xt^1(\Lambda'', \Lambda'') \end{array}$$

s'identifie à l'application linéaire tangente $(d\pi_{-})_x : T_x \Sigma_{-} \rightarrow T_{\pi_{-}(x)} \Sigma$. Pour vérifier que $\omega : T_x \Sigma_{-} \rightarrow \mathcal{E}xt_{-}^1(\Lambda, \Lambda)$ est un isomorphisme, il faut donc vérifier que les flèches (1) et (2) dans le diagramme ci-dessus ont des noyaux isomorphes. Mais le noyau de $(d\pi_{-})_x$ est l'espace tangent à la fibre de π_{-} en x , isomorphe à l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathcal{E}xt^1(\Lambda'', \Lambda'))$; son espace tangent en x est isomorphe à $\mathcal{E}xt^1(\Lambda'', \Lambda')/(u)$. Le lemme est montré. ■

Preuve (du théorème 11) On va faire la démonstration quand les variétés \mathcal{S}_{-} et \mathcal{S}_{+} paramètrent des familles universelles de systèmes cohérents, la preuve dans le cas général n'étant conceptuellement guère plus compliquée. Soit Λ_{-} la famille paramétrée par \mathcal{S}_{-} . On a une suite exacte de familles de systèmes cohérents paramétrées par Σ_{-}

$$0 \longrightarrow \Lambda' \longrightarrow \Lambda_{-}|_{\Sigma_{-}} \longrightarrow \Lambda'' \longrightarrow 0$$

où Λ' paramètre les systèmes cohérents de la forme $(\Gamma, \mathcal{O}_l(\frac{n}{2} - \alpha))$ et Λ'' les systèmes cohérents de la forme $(0, \mathcal{O}_l(\frac{n}{2} + \alpha))$. Soit $\widetilde{\mathcal{S}}_{-}$ la variété projective éclatée de \mathcal{S}_{-} le long du fermé Σ_{-} . On note $p_{-} : \widetilde{\mathcal{S}}_{-} \rightarrow \mathcal{S}_{-}$ la projection canonique. On note $E_{-} = p_{-}^{-1}(\Sigma_{-})$ le diviseur exceptionnel. Posons $\widetilde{\Lambda}_{-}, \widetilde{\Lambda}' = p_{-}^{*}(\Lambda')$, $\widetilde{\Lambda}'' = p_{-}^{*}(\Lambda'')$. Ce sont des familles de systèmes cohérents paramétrées par E_{-} . On définit le système algébrique $\overline{\Lambda}_{-}$ sur $\widetilde{\mathcal{S}}_{-}$ comme noyau de la projection canonique

$\widetilde{\Lambda}_- \longrightarrow \widetilde{\Lambda}''$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & \widetilde{\Lambda}_-(-E_-) & \xlongequal{\quad} & \widetilde{\Lambda}_-(-E_-) & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \overline{\Lambda}_- & \longrightarrow & \widetilde{\Lambda}_- & \longrightarrow & \widetilde{\Lambda}'' \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & \widetilde{\Lambda}' & \longrightarrow & \widetilde{\Lambda}_-|_{E_-} & \longrightarrow & \widetilde{\Lambda}'' \longrightarrow 0
\end{array}$$

Montrons que $\overline{\Lambda}_-$ est une famille de systèmes cohérents α_+ -semi-stables, plate sur \mathcal{S}_- . Pour tout point $x \notin E_-$, on a évidemment $(\overline{\Lambda}_-)_x \simeq (\widetilde{\Lambda}_-)_x$ qui est un système cohérent α_+ -semi-stable. Soit maintenant $x \in E_-$, $y = p_-(x)$, et $[\Lambda]$ la classe paramétrée en y , ainsi que (Λ', Λ'') la filtration d'Harder-Narasimhan de Λ pour le paramètre α_+ . Soit v un vecteur tangent à $\widetilde{\mathcal{S}}_-$ en x et transverse au diviseur E_- , ce qui implique l'image de v par la différentielle $(dp_-)_x$ est non contenue dans l'image de l'inclusion d'espaces tangents $T_y \Sigma_- \subset T_y \mathcal{S}_-$, c'est à dire que l'image de $(dp_-)_x(v)$ par la projection $\mathcal{E}xt^1(\Lambda, \Lambda) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\Lambda', \Lambda'')$ est non nulle (cf lemme 4). Le vecteur v correspond à un morphisme $t : D \longrightarrow \widetilde{\mathcal{S}}_-$ où $D = \text{Spec}(\mathbb{C}[\epsilon]/\epsilon^2)$. Soit $I = \mathbb{C}\epsilon$ l'idéal du point fermé de D . De la suite exacte $0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathbb{C}[\epsilon]/\epsilon^2 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0$ on déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow I \otimes \Lambda \longrightarrow t^*(\widetilde{\Lambda}_-) \longrightarrow \Lambda \longrightarrow 0$$

où Λ est le système cohérent paramétré en y . L'extension $u \in \mathcal{E}xt^1(\Lambda, \Lambda \otimes I)$ obtenue n'est autre que l'image $(dp_-)_x(v)$ (cf paragraphe 3.3). On applique maintenant le lemme du serpent au diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & I \otimes t^*(\overline{\Lambda}_-) & \longrightarrow & I \otimes t^*(\widetilde{\Lambda}_-) & \longrightarrow & I \otimes t^*(\widetilde{\Lambda}'') \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 0 \\
0 & \longrightarrow & t^*(\overline{\Lambda}_-) & \longrightarrow & t^*(\widetilde{\Lambda}_-) & \longrightarrow & t^*(\widetilde{\Lambda}'') \longrightarrow 0
\end{array}$$

où les deux lignes sont exactes et la dernière flèche à droite est nulle, car $t^*(\widetilde{\Lambda}'')$ a pour support le point fermé de D . On obtient une suite exacte de systèmes cohérents

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & I \otimes \Lambda'' & \longrightarrow & (\overline{\Lambda}_-)_x & \longrightarrow & (\Lambda_-)_y \longrightarrow \Lambda'' \longrightarrow 0 \\
& & & & \searrow & & \nearrow \\
& & & & \Lambda' & &
\end{array}$$

où la flèche horizontale du milieu se factorise comme indiqué par l'injection $\Lambda' \longrightarrow (\Lambda_-)_y$. La suite exacte obtenue

$$0 \longrightarrow I \otimes \Lambda'' \longrightarrow (\overline{\Lambda}_-)_x \longrightarrow \Lambda' \longrightarrow 0 \quad (*)$$

est par construction l'image de la classe $v \in \mathcal{E}xt^1(\Lambda, \Lambda)$ par la projection $\mathcal{E}xt^1(\Lambda, \Lambda) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\Lambda', \Lambda'')$. L'extension (*) est non scindée, c'est donc que $(\overline{\Lambda}_-)_x$ est α_+ -semi-stable; il est clair ensuite d'après la caractérisation de la platitude par la constance du polynôme de Hilbert sur les fibres d'un morphisme projectif que la famille de systèmes cohérents $\overline{\Lambda}_-$ est plate sur $\widetilde{\mathcal{S}}_-$. Cela donne par la propriété de module un morphisme $p_+ : \widetilde{\mathcal{S}}_- \longrightarrow \mathcal{S}_+$. Les deux morphismes $\pi_+ \circ p_+$ et $\pi_- \circ p_-$ envoient un point fermé de $\widetilde{\mathcal{S}}_-$ sur le même point fermé de \mathcal{S} ; en effet avec les hypothèses et notations qui précèdent un point x de E_- est envoyé sur le point de Σ qui est la classe du système cohérent $\Lambda' \oplus \Lambda''$. On déduit que $\pi_+ \circ p_+$ et $\pi_- \circ p_-$ sont deux morphismes égaux car la variété $\widetilde{\mathcal{S}}_-$ est intègre.

On a donc en particulier l'égalité schématique $p_-^{-1}(\pi_-^{-1}(\Sigma)) = p_+^{-1}(\pi_+^{-1}(\Sigma))$. Comme $\pi_-^{-1}(\Sigma) = \Sigma_-$ et $\pi_+^{-1}(\Sigma) = \Sigma_+$ au sens schématique et $p_-^{-1}(\Sigma_-)$ est le diviseur exceptionnel E_- , on en déduit par la propriété universelle de l'éclatement que le morphisme $p_+ : \widetilde{\mathcal{S}}_- \longrightarrow \mathcal{S}_+$ se factorise par l'éclaté $\widetilde{\mathcal{S}}_+$ de \mathcal{S}_+ le long de Σ_+ .

En effectuant un raisonnement similaire à ce qui précède avec l'éclaté $\widetilde{\mathcal{S}}_+$ en place de $\widetilde{\mathcal{S}}_-$, on déduit qu'il existe finalement deux morphismes $f_- : \widetilde{\mathcal{S}}_- \longrightarrow \widetilde{\mathcal{S}}_+$ et $f_+ : \widetilde{\mathcal{S}}_+ \longrightarrow \widetilde{\mathcal{S}}_-$ qui sont inverses l'un de l'autre au sens ensembliste. Ils sont donc inverses au sens schématique car on manipule des variétés intègres sur un corps algébriquement clos.

Pour $\alpha \leq 3/2$ les fermés Σ_- , Σ_+ sont lisses et irréductibles et dans le lemme 4 la suite est aussi exacte à droite, ce qui montre que le diagramme de l'énoncé est cartésien. Le théorème est prouvé. ■

Il est important pour la suite de connaître les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel commun E . D'après la proposition 7, lorsque $\alpha \geq 2$ ce fermé est réunion de deux composantes A et B , il est certain que dans ce dernier cas E contiendra au moins deux composantes irréductibles. On est amené à étudier l'intersection Σ'_- de Σ_- avec le lieu singulier de \mathcal{S}_- , ce qui fait l'objet de ce qui suit.

Définition 22. Soit E un fibré vectoriel de rang 2 sur une variété algébrique X supposée lisse. Pour tout couple (i, d) d'entiers positifs tels que $1 \leq i \leq \frac{d+1}{2}$, on note $\text{Sec}_i^d(E)$ la projection sur $\mathbb{P}(S^d E)$ du lieu des points de $\mathbb{P}(S^d E) \times X$ où le morphisme naturel de fibrés dit de "contraction"

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^d E)}(-1) \boxtimes S^i E \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^d E)} \boxtimes S^{d-i} E^*$$

soit de rang $\leq i$.

On peut étendre cette définition à $i = 0$, en remarquant que $\text{Sec}_0^d(E) = \emptyset$. Il s'agit bien sur de l'adaptation à un contexte relatif de la définition classique de i -**ème variété de sécantes** à la courbe rationnelle normale de degré d (voir par exemple [Ha] prop. 9.7). On montre facilement que $\text{Sec}_i^d(E)$ est lisse irréductible de dimension relative $2i - 1$ au dessus de X .

Revenons maintenant à l'étude de Σ'_- . On suppose $\alpha \geq 2$. Alors la composante B est isomorphe au fibré projectif $\mathbb{P}(S^{2\alpha-2}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2))$, où \mathcal{J} est le faisceau d'idéaux introduit à la définition 19. On peut encore écrire ce fibré comme changement de base du fibré $\mathbf{P}(S^{2\alpha-2}Q)$ sur \mathbf{P}_2^* , où Q est le fibré tautologique quotient.

Proposition 10. On suppose $\alpha \geq 2$. Le fermé Σ'_- est non vide si et seulement si $\alpha \geq 5/2$, et dans ce cas est contenu dans la composante B et est isomorphe à la variété des sécantes relatives $\text{Sec}_{[\alpha-\frac{3}{2}]}^{2\alpha-2}Q \subset \mathbf{P}(S^{2\alpha-2}Q)$. Il est donc intègre de dimension $n - 4$ si n est impair, et $n - 5$ si n est pair.

Preuve Soit $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ un système cohérent α_- -stable définissant un point singulier de \mathcal{S}_- . Alors le théorème 9 énonce que $\mathcal{E}xt^2(\Lambda, \Lambda) \neq 0$ et donc que $\mathcal{E}xt^2(\Theta, \Theta)^* = \mathcal{H}om(\Theta, \Theta(-3)) \neq 0$. Par suite le faisceau Θ ne peut-être semi-stable, et il admet une filtration d'Harder-Narasimhan

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{l'}(a) \longrightarrow \Theta \longrightarrow \mathcal{O}_{l''}(b) \longrightarrow 0$$

où l', l'' sont deux droites et $a > b$. On a de plus $l' = l''$ car il existe un morphisme non trivial de $u : \Theta \longrightarrow \Theta(-3)$. Un tel morphisme u se factorise nécessairement comme composée

$$u : \Theta \longrightarrow \mathcal{O}_l(b) \xrightarrow{v} \mathcal{O}_l(a-3) \longrightarrow \Theta(-3)$$

On en tire la condition $a \geq b + 3$, et donc $a \geq \frac{n+3}{2}$. Maintenant posons $\Gamma' = \Gamma \cap H^0(\mathcal{O}_l(a))$, la condition de α -semi-stabilité donne $a \leq \frac{n}{2} + \alpha(1 - \dim \Gamma')$, ce qui entraîne $\frac{3}{2} \leq \alpha(1 - \dim \Gamma')$, et par suite $\Gamma' = 0$. On a donc une suite exacte de systèmes cohérents

$$0 \longrightarrow (0, \mathcal{O}_l(a)) \longrightarrow \Lambda \longrightarrow (\Gamma, \mathcal{O}_l(b)) \longrightarrow 0$$

avec $\frac{n+3}{2} \leq a \leq \frac{n}{2} + \alpha$, $b \geq \frac{n}{2} - \alpha$, et $a + b = n$. De plus si la classe de Λ appartient à Σ_- , elle appartient à B car le support de Θ est une conique double. Supposons que cela soit vérifié alors on a de plus une suite exacte

$$0 \longrightarrow (\Gamma, \mathcal{O}_l(\frac{n}{2} - \alpha)) \longrightarrow (\Gamma, \Theta) \longrightarrow (0, \mathcal{O}_l(\frac{n}{2} + \alpha)) \longrightarrow 0 \quad (*)$$

et l'on obtient nécessairement une inclusion de faisceaux $i : \mathcal{O}_l(a) \subset \mathcal{O}_l(\frac{n}{2} + \alpha)$ qui se relève comme suit

$$\begin{array}{ccc} \Theta & \longrightarrow & \mathcal{O}_l(\frac{n}{2} + \alpha) \\ & \nwarrow j & \uparrow i \\ & & \mathcal{O}_l(a) \end{array}$$

L'inclusion i détermine une section non nulle de $\mathcal{O}_l(\frac{n}{2} + \alpha - a)$. Que l'inclusion i admette un relèvement j est équivalent au fait que le cup produit de cette section par la classe de $(*)$ soit nul. Notons que l'espace vectoriel $H^0(\mathcal{O}_l(\frac{n}{2} + \alpha - a))$ s'identifie à la fibre de $S^{\frac{n}{2} + \alpha - a}Q$ en $\tilde{l} \in \mathbf{P}_2^*$ et que $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_l(a), \mathcal{O}_l(\frac{n}{2} - \alpha))$ s'identifie à la fibre de $S^{2\alpha-2-(\frac{n}{2} + \alpha - a)}Q^*$ au même point. Le fermé Σ'_- est donc la réunion croissante des fermés $B_i = \text{Sec}_i^{2\alpha-2}(Q)$ pour i compris entre 0 et $[\alpha - \frac{3}{2}]$. ■

Le fermé Σ'_- est donc muni d'une filtration par les fermés B_i introduits dans la preuve précédente. Pour $i = 1$ on remarque que $B_1 = \mathbb{P}(Q)$, le plongement $B_1 \subset B = \mathbb{P}(S^{2\alpha-2}Q)$ étant celui de Veronese. Notons que B_1 est aussi l'intersection de A et B .

Proposition 11. Le diviseur exceptionnel de $\tilde{\mathcal{S}}$ possède au plus deux composantes irréductibles. Pour $\alpha \leq 3/2$ il est irréductible.

Preuve Soit Λ un système cohérent α_- -stable. D'après le théorème 9, il existe un voisinage du schéma pointé $(\mathcal{S}_-, [\Lambda])$ qui est isomorphe à un sous-schéma fermé d'un voisinage lisse $(\mathcal{N}, [\Lambda])$, où \mathcal{N} est une variété d'espace tangent $\mathcal{E}xt^1(\Lambda, \Lambda)$ en ce point, le faisceau d'idéaux étant localement

défini par $\mathcal{E}xt^2(\Lambda, \Lambda)$ équations. Si maintenant Λ définit un point de Σ_- appartenant à la strate B_i , alors en posant $a = \frac{n}{2} + \alpha - i$ on a

$$\dim \mathcal{E}xt^1(\Lambda, \Lambda) = n + 2a + 3, \quad \dim \mathcal{E}xt^2(\Lambda, \Lambda) = a - b - 2$$

Notons I le faisceau d'idéaux associé au plongement composé $(\Sigma_-, \Lambda) \subset (\mathcal{S}_-, \Lambda) \subset (\mathcal{N}, \Lambda)$, et J celui du premier plongement. On a un morphisme naturel surjectif de faisceaux conormaux

$$I/I^2|_{B_i} \longrightarrow J/J^2|_{B_i} \longrightarrow 0$$

qui induit un plongement naturel $\mathbb{P}(J/J^2|_{B_i}) \subseteq \mathbb{P}(I/I^2|_{B_i})$. Le terme de gauche est l'image réciproque de B_i dans l'éclaté, le terme de droite s'identifie à l'image inverse de B_i dans l'éclaté de \mathcal{N} le long de Σ_- . Le lieu singulier du faisceau $I/I^2|_{B_i}$ est de support contenu dans $A \cap B$ (si le voisinage considéré a une intersection non vide avec ce fermé), et donc ce module cohérent est sans torsion car B_i est lisse. Sur l'ouvert complémentaire de $B \setminus A$ le rang du fibré $I/I^2|_{B_i}$ est donc $n + 2a + 3 - (n - 2) = 2a + 5$. L'image réciproque de la strate B_i privée de $B \setminus A$ dans l'éclatement de \mathcal{N} le long de Σ_- est donc de dimension $\leq 2a + 4 + \dim B_i = 2(a + i) + 3 + n - 2\alpha = 2n + 3$. Par conséquent l'image réciproque d'une telle strate dans l'éclaté de \mathcal{S}_- le long de Σ_- ne peut être une composante irréductible. ■

4.3. Sauts au passage d'une valeur critique. On conserve les notations du paragraphe précédent. On pose de plus $\mathcal{D}_{+/-} = \mathcal{D}_{\alpha_{+/-}}$ les fibrés déterminants sur les variétés $\mathcal{S}_{+/-}$ introduits au paragraphe 4.1. On cherche à évaluer la différence

$$\Delta = c_1(\mathcal{D}_+)^{2n+5} \cap [\mathcal{S}_+] - c_1(\mathcal{D}_-)^{2n+5} \cap [\mathcal{S}_-] \quad (+)$$

Pour cela on utilise le diagramme du théorème 11. La quantité $(+)$ est encore égale à $(c_1(\phi_+^* \mathcal{D}_+)^{2n+5} - c_1(\phi_-^* \mathcal{D}_-)^{2n+5}) \cap [\tilde{\mathcal{S}}]$, où $\varphi_{+/-} : \tilde{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{S}_{+/-}$ sont les éclatements du théorème précédent.

Lemme 6. *On a l'isomorphisme de fibrés inversibles*

$$\varphi_-^* \mathcal{D}_- \simeq \mathcal{O}(E) \otimes \varphi_+^* \mathcal{D}_+$$

où $E \subset \tilde{\mathcal{S}}$ est le diviseur exceptionnel de l'éclatement.

Preuve En utilisant les notations introduites au début de la preuve du théorème 11, et d'après la propriété des fibrés déterminants, on a les égalités

$$\phi_{+/-}^* \mathcal{D}_{+/-} \simeq \det(p_! \phi_{+/-}^*(\Theta_{+/-}) \cdot h) \otimes \det \Gamma_{+/-}^*$$

Or par hypothèse nous avons la suite exacte de systèmes algébriques sur $\widetilde{V_{+/-}}$

$$0 \longrightarrow (\Gamma_+, \Theta_+) \longrightarrow (\Gamma_-, \Theta_-) \longrightarrow (0, \Theta) \longrightarrow 0$$

où $\Gamma_- \simeq \Gamma_+$ et Θ est paramètre les faisceaux de la forme $\mathcal{O}_l(\frac{n}{2} + \alpha)$. Comme Θ est plat sur le diviseur exceptionnel, on en déduit que la classe $p_! \Theta \cdot h$ est celle d'un faisceau inversible sur le diviseur exceptionnel. Le lemme suivant permet alors de conclure. ■

Lemme 7. *Soit X une variété projective intègre et E un diviseur de Cartier effectif. Soit L un faisceau cohérent de support E , et inversible sur E . Alors $\det L \simeq \mathcal{O}(E)$.*

Preuve Tout vient du fait que L est un faisceau de dimension homologique 1: en effet toute surjection $A \longrightarrow L \longrightarrow 0$ où A est un fibré vectoriel sur X a pour noyau un fibré B , car en tout point le germe de L est isomorphe au germe de \mathcal{O}_E . L'existence de A est donnée par le théorème de Serre. Par définition le déterminant de L est donné par $\det(A) \otimes \det(B)^{-1}$, qui est isomorphe

à $\mathcal{O}(E)$. ■

Notations: on pose

- $d_{+/-} = c_1(\mathcal{D}_{+/-})$;
- L_- et L_+ les fibrés inversibles relativement amples sur les fibrés en espaces projectifs $\Sigma_- \longrightarrow \Sigma$ et $\Sigma_+ \longrightarrow \Sigma$; on note leurs classes de Chern $l_{+/-}$;
- γ_i , pour $i = 1, 2$, la i -ème classe de Chern du fibré tautologique Γ ;
- τ_1 et τ_2 les deux fibrés inversibles provenant des fibrés $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(1)$ venant de chacun des deux facteurs du produit $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$; on pose v la classe de Chern du fibré inversible $\tau_1^{\otimes \frac{n}{2}-\alpha} \otimes \tau_2^{\otimes \frac{n}{2}+\alpha} \otimes \det \Gamma^*$; on pose enfin $u = (2\alpha - 1)\tau_1 + (2\alpha - 2)\tau_2$;
- ϵ la classe du diviseur exceptionnel E .

On a alors les expressions suivantes des restrictions des fibrés déterminants $\mathcal{D}_{+/-}$ aux fermés $\Sigma_{+/-}$.

Lemme 8. On a:

$$\mathcal{D}_-|_{\Sigma_-} \simeq L_-^{-1} \otimes \tau_1^{\otimes \frac{n}{2}-\alpha} \otimes \tau_2^{\otimes \frac{n}{2}+\alpha} \otimes \det \Gamma^*, \quad \mathcal{D}_+|_{\Sigma_+} \simeq L_+ \otimes \tau_1^{\otimes \frac{n}{2}-\alpha} \otimes \tau_2^{\otimes \frac{n}{2}+\alpha} \otimes \det \Gamma^*$$

Preuve D'après la preuve de la proposition 6 et les notations qui la précèdent on a une suite exacte de familles de systèmes cohérents paramétrées par Σ_- donnée par

$$0 \longrightarrow L_- \otimes \Lambda' \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Lambda'' \longrightarrow 0$$

Par la propriété universelle du fibré \mathcal{D}_- on obtient

$$\mathcal{D}_-|_{\Sigma_-} \simeq L_-^{\otimes -2} \otimes \det(\Gamma)^* \otimes \det(L_- \otimes Rp_!(\mathcal{O}_{D_1}(\frac{n}{2} - \alpha) \cdot h)) \otimes \det(Rp_!(\mathcal{O}_{D_2}(\frac{n}{2} + \alpha) \cdot h))$$

Rappelons que h est la classe du faisceau \mathcal{O}_l où l est une droite, on peut donc écrire $\mathcal{O}_{D_i} \cdot h = \mathcal{O}_{D_i} - \mathcal{O}_{D_i}(-1)$ dans le groupe de Grothendieck de $\Sigma_- \times \mathbf{P}_2$; on obtient donc

$$\det(L_- \otimes Rp_!(\mathcal{O}_{D_1}(\frac{n}{2} - \alpha) \cdot h)) \otimes \det(Rp_!(\mathcal{O}_{D_2}(\frac{n}{2} + \alpha) \cdot h)) = L_-^{\otimes \frac{n}{2}-\alpha+1} \otimes (L_- \otimes \tau_1^{-1})^{\otimes \alpha-\frac{n}{2}} \otimes \tau_2^{\otimes \frac{n}{2}+\alpha}$$

ce qui donne la première partie du lemme. La seconde se démontre à l'identique, la différence venant de ce que Γ n'est pas tensorisée par L_+ . ■

On a alors

$$\Delta = -\frac{1}{\epsilon} \cdot (\varphi_+^*(d_+)^{2n+5}|_E - \varphi_-^*(d_-)^{2n+5}|_E) \cap [E]$$

où l'expression $\frac{1}{\epsilon} \cdot (\varphi_+^*(d_+)^{2n+5}|_E - \varphi_-^*(d_-)^{2n+5}|_E)$ désigne la division de la classe entre parenthèses par la classe ϵ : on sait en effet d'après le lemme 6 que la classe $\varphi_+^*(d_+)^{2n+5} - \varphi_-^*(d_-)^{2n+5}$ est un multiple de la classe du diviseur exceptionnel. D'autre part le lemme 8 donne:

$$\varphi_+^*(d_+)|_E = l_+ + v, \quad \varphi_-^*(d_-)|_E = -l_- + v$$

et on peut écrire

$$\begin{aligned} (l_+ + v)^{2n+5} - (-l_- + v)^{2n+5} &= \sum_{i=0}^{2n+5} \binom{2n+5}{i} (l_+^i - (-1)^i l_-^i) \cdot v^{2n+5-i} \\ &= (l_+ + l_-) \cdot \sum_{\substack{0 \leq i \leq 2n+5 \\ 0 \leq j \leq i-1}} \binom{2n+5}{i} l_+^j (-l_-)^{i-j-1} \cdot v^{2n+5-i} \end{aligned}$$

Après réindexation de la somme précédente, on peut donc écrire

$$\Delta = \sum_{\substack{0 \leq i \leq 2n+4 \\ 0 \leq j \leq i}} \binom{2n+5}{i+1} (-1)^{i+j} l_+^j \cdot l_-^{i-j} \cdot v^{2n+4-i} \cap [E] \quad (\Delta)$$

Lorsque $\alpha \in \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$, on sait que Σ_- est irréductible, ainsi que E . Lorsque $\alpha \geq 2$ le diviseur E est réunion des deux composantes A' et B' , qui sont les images réciproques dans l'éclaté des deux composantes A et B . On peut donc écrire $\Delta = \Delta_A + \Delta_B$, où les deux termes de droite sont respectivement les contributions de A' et B' . Dans les calculs qui suivent on ne tiendra compte que de Δ_A si $\alpha < 2$.

Calculons Δ_A . Il existe un morphisme birationnel $\rho : A' \longrightarrow A \times_{\Sigma} \Sigma_+$, et d'après le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & A' & \\ \varphi_- \swarrow & & \searrow \varphi_+ \\ A & & \Sigma_+ \\ \pi_- \searrow & & \swarrow \pi_+ \\ & \Sigma & \end{array}$$

et la formule de projection, on peut écrire

$$v^{2n+4-i} \cdot l_+^j \cdot l_-^{i-j} \cap [A'] = v^{2n+4-i} \cdot \pi_+ * (l_+^j) \cdot \pi_- * (l_-^{i-j}) \cap [\Sigma]$$

L'image directe $\pi_+ * (l_+^j)$ s'interprète comme une classe de Segré d'un fibré vectoriel, à savoir le dual celui défini à la proposition 8 et qui est noté $\underline{\text{Ext}}_p^1(\Lambda', \Lambda'')$, et dont le projectif au sens de Grothendieck (c'est-à-dire paramétrant les quotients de rang 1) donne Σ_+ . Par l'écriture $\pi_- * (l_-^{i-j}) \cap [\Sigma]$, nous entendons en fait l'image directe propre $\pi_- * (l_-^{i-j} \cap [A])$ au sens des cycles (le cycle entre parenthèses étant de dimension $\dim A - (i - j) = n + j - 2\alpha - i + 2$). Le problème ici est que $\mathcal{J}^{2\alpha-2}(2\alpha - 1, 2\alpha - 2)$ est un faisceau cohérent singulier. Calculer sa classe de Segré, qui est par définition la classe de Segré du cône qu'il définit, nécessite quelques précautions (voir [F] ex. 4.1.6-7). Aussi nous allons faire en sorte de nous ramener à des classes de Segré de fibrés vectoriels.

Rappelons que A est isomorphe, quand $\alpha \geq 1$, à l'éclaté de Σ le long du fermé d'idéal $\mathcal{J}^{2\alpha-2}$, c'est-à-dire à $\text{Proj}(\oplus \mathcal{J}^{(2\alpha-2)*})$, par la proposition 7. Soit σ la classe du fibré canonique $\mathcal{O}(1)$ sur cet éclaté, qui est encore le faisceau d'idéaux inversible du diviseur exceptionnel. Alors en suivant les conventions ci-dessus on peut écrire $l_-|_A = \sigma + u$. On en déduit alors

$$\pi_- * (l_-^{i-j}|_A \cap [A]) = \sum_{k=0}^{i-j} \binom{i-j}{k} u^{i-j-k} \cdot \pi_- * (\sigma^k \cap [A]) \quad (*)$$

Lemme 9. *L'image directe propre $\pi_- * (\sigma^k \cap [A])$ est égale à $[\Sigma]$ si $k = 0$ et à $-(2 - 2\alpha)^k \frac{k(k-1)}{2} \cdot \tau^{k-2}$ sinon, où τ est la classe du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(1)$ porté par le sous-schéma fermé de Σ d'idéal \mathcal{J} . Autrement dit τ est la restriction de τ_i pour $i = 1, 2$ à ce sous-schéma.*

Preuve Posons $\mathcal{J}' = \mathcal{J}^{2\alpha-2}$. Soit E_A le diviseur exceptionnel de A . Il est l'image réciproque au sens schématique du sous-schéma fermé d'idéal \mathcal{J}' par la projection $A \longrightarrow \Sigma$. On peut encore

écrire que E_A est isomorphe à $\text{Proj}(\oplus_k \mathcal{J}'^k / \mathcal{J}'^{k+1})$. Comme σ est la classe du faisceau $\mathcal{O}(-E_A)$, on peut écrire

$$\pi_- * (\sigma^k \cap [A]) = -\pi_- * (\sigma^{k-1} \cap [E_A])$$

L'image inverse dans A de la "diagonale réduite" d'idéal \mathcal{J} est isomorphe à $\text{Proj}(\oplus_k \mathcal{J}'^k / \mathcal{J}'^{(2\alpha-2)k+1})$, lui-même isomorphe à $\mathbb{P}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$ plongé dans $\mathbb{P}(S^{2\alpha-2}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2))$ via le plongement de Veronese. On a donc un plongement $E'_A = \mathbb{P}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2) \subset E_A$, qui est un homéomorphisme topologique. L'idéal du morphisme surjectif d'algèbres

$$\oplus_k \mathcal{J}'^k / \mathcal{J}'^{k+1} \longrightarrow \oplus_k \mathcal{J}'^k / \mathcal{J}'^{(2\alpha-2)k+1}$$

est engendré par la partie de degré 0 qui est \mathcal{J}/\mathcal{J}' ; c'est donc un idéal nilpotent d'indice $2\alpha - 2$ et on a l'égalité $[E_A] \equiv (2\alpha - 2) [E'_A]$. La restriction de σ à $\mathbb{P}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$ est égale à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)}(2\alpha - 2)$, c'est-à-dire en termes de classe à $(2\alpha - 2)\sigma'$, avec σ' la classe du fibré tautologique $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)}(1)$. Par suite on a

$$\begin{aligned} \pi_- * (\sigma^k \cap [A]) &= -(2\alpha - 2)^k \pi_- * (\sigma'^{k-1} \cap [E'_A]) \\ &= -(2\alpha - 2)^k s_{k-2}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2) \end{aligned}$$

Or le fibré $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ a pour support la grassmannienne relative G et est isomorphe à l'image réciproque du fibré $Q^*(-1)$ par la projection $G \longrightarrow \mathbf{P}_2^*$. On écrit ensuite

$$\begin{aligned} s_{k-2}(Q^*(-1)) &= [c(Q(1))^{-1}]_{k-2} \\ &= [(1+h)^{-3}]_{k-2} \\ &= (-1)^k \frac{k(k-1)}{2} \tau^{k-2} \end{aligned}$$

ce qui montre le lemme. ■

Le lemme suivant est une conséquence du lemme 9.

Lemme 10. *Utilisant les notations précédentes, lorsque $\alpha \geq 1$ l'image directe $\pi_- * (l_-^{i-j}|_A \cap [A])$ est alors égale à*

$$\epsilon_{i-j} = u^{i-j} - a_{i-j} \tau^{i-j-2}$$

où $a_{i-j} = 2(i-j)(i-j-1)(2\alpha-1)^{i-j-2}(\alpha-1)^2$. Notons que pour $i-j \geq 5$ cette classe est nulle. Lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$ on a $l_- \simeq \tau_2^\vee$ et $\pi_- * (l_-^{i-j}) = (-1)^{i+j} \tau_2^{i-j}$.

Preuve La seconde assertion est immédiate car pour $\alpha = 1/2$ on a $\Sigma_- \simeq \Sigma$ et $l_- \simeq \tau_2^\vee$. Pour $\alpha \geq 1$, d'après ce qui précède la classe de l'énoncé s'exprime sous la forme $u^{i-j} - a_{i-j} \tau^{i-j-2}$ avec $a_{i-j} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{i-j} k(k-1) \binom{i-j}{k} (4\alpha-3)^{i-j-k} (2-2\alpha)^k$. En vertu de l'identité polynômiale valable dans $\mathbb{C}[X, Y]$ et pour tout entier $m > 0$, et qui consiste en une différentiation de l'identité du binôme:

$$m(m-1)(Y+X)^{m-2} = \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} k(k-1) Y^{m-k} X^{k-2}$$

on en déduit l'énoncé. ■

On peut donc écrire $\Delta_A = \Delta_A^* + \Delta_A^{**}$, où Δ_A^* est la contribution apportée par les termes u^{i-j} dans la classe $(\pi_-)_*(l_-^{i-j}|_A)$, et Δ_A^{**} est celle apportée par $a_{i-j} \tau^{i-j-2}$ (classe de support inclus dans la diagonale).

Explicitons maintenant l'image directe $\pi_+ * (l_+^j)$. Posons \mathcal{E} le fibré vectoriel sur Σ défini par $\underline{\text{Ext}}_p^1(\Lambda', \Lambda'')$. On a par définition $\pi_+ * (l_+^j) = s_{j-n-2\alpha-2}(\mathcal{E}^\vee)$ car on a $\Sigma_+ = \mathbb{P}(\mathcal{E}^\vee)$ et le fibré

projectif est de rang $n + 2\alpha + 2$. On sait que \mathcal{E} s'insère dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma^* \boxtimes S^{\frac{n}{2}+\alpha} Q \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \underline{\mathcal{E}xt}_p^1(\mathcal{O}_{D_1}, \mathcal{O}_{D_2}(2\alpha)) \longrightarrow 0$$

Nous avons vu au cours de la preuve de la proposition 6 que le terme de droite est isomorphe au faisceau $\mathcal{J}^{2\alpha+1}(2\alpha + 2, 2\alpha + 1)$, qui admet également la résolution suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \boxtimes S^{2\alpha} Q \longrightarrow \tau_1 \boxtimes S^{2\alpha+1} Q \longrightarrow \mathcal{J}^{2\alpha+1}(2\alpha + 2, 2\alpha + 1) \longrightarrow 0$$

on a donc l'identité suivante des classes de Chern totales

$$c(\mathcal{E}) c(\Gamma^* \boxtimes S^{\frac{n}{2}+\alpha} Q)^{-1} = c(\tau_1 \boxtimes S^{2\alpha+1} Q) c(\mathcal{O} \boxtimes S^{2\alpha} Q)^{-1}$$

qui entraîne l'identité suivante entre classes de Segré

$$s(\mathcal{E}^\vee) = c(\mathcal{E})^{-1} = s(\Gamma \boxtimes S^{\frac{n}{2}+\alpha} Q^*) c(\mathcal{O} \boxtimes S^{2\alpha} Q) c(\tau_1 \boxtimes S^{2\alpha+1} Q)^{-1}$$

On pose $\delta = \sum_* \delta_*$ la classe totale égale à $c(\mathcal{O} \boxtimes S^{2\alpha} Q) c(\tau_1 \boxtimes S^{2\alpha+1} Q)^{-1}$. On a l'égalité

$$\delta = \frac{(1 + \tau_1 - \tau_2)^{\binom{2\alpha+2}{2}}}{(1 + \tau_1)^{\binom{2\alpha+3}{2}} \cdot (1 - \tau_2)^{\binom{2\alpha+1}{2}}}$$

On a donc

$$\Delta_A^* = \sum_{n+2\alpha+3 \leq j \leq i \leq 2n+5} (-1)^{i-j} \binom{2n+5}{i} v^{2n+5-i} \cdot u^{i-j} \cdot s_{j-n-2\alpha-3}(\mathcal{E}^\vee) \cap [G \times \mathbf{P}_2^*]$$

où les indices i et j désignent les indices $i+1$ et $j+1$ dans l'écriture (Δ) qui précède le paragraphe présent consacré au calcul de Δ_A . En d'autres termes on peut écrire que

$$\Delta_A^* = \left[(1+v)^{2n+5} \cdot \frac{1}{1+u} \cdot s(\mathcal{E}^\vee) \right]_{n-2\alpha+2} \cap [G \times \mathbf{P}_2^*]$$

où la notation $[\quad]_{n-2\alpha+2}$ désigne la partie de degré $n - 2\alpha + 2$ de l'expression entre crochets. Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} (1+v)^{2n+5} \cdot \frac{1}{1+u} \cdot s(\mathcal{E}^\vee) &= (1+v)^{2n+5} \cdot \frac{1}{1+u} \cdot [\sum_l s_l(\Gamma \boxtimes S^{\frac{n}{2}+\alpha} Q^*)] \cdot \delta \\ &= \sum_{0 \leq m \leq 2n+5} \binom{2n+5}{m} (-1)^m \frac{[1+(\frac{n}{2}-\alpha)\tau_1+(\frac{n}{2}+\alpha)\tau_2]^m \cdot \delta}{1+u} \cdot \gamma_1^{2n+5-m} \cdot [\sum_l s_l(\Gamma \boxtimes S^{\frac{n}{2}+\alpha} Q^*)] \end{aligned}$$

Pour tout réel x on pose $(x)_+ = \max(x, 0)$. On a donc

$$\begin{aligned} \Delta_A^* &= \sum_{\substack{n+2\alpha+3 \leq m \leq 2n+5 \\ (m-n-2\alpha-7)_+ \leq l \leq m-n-2\alpha-3}} (-1)^m \binom{2n+5}{m} \frac{[1+(\frac{n}{2}-\alpha)\tau_1+(\frac{n}{2}+\alpha)\tau_2]^m \cdot \delta}{1+u} \\ &\quad \cdot \gamma_1^{2n+5-m} \cdot s_l(\Gamma \boxtimes S^{\frac{n}{2}+\alpha} Q^*) \cap [G \times \mathbf{P}_2^*] \end{aligned}$$

Le lemme suivant va nous permettre d'achever ce calcul.

Lemme 11. Soit $\rho : G \times \mathbf{P}_2^* \longrightarrow \mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$ la projection canonique. On pose les entiers $\zeta = \binom{\frac{n}{2}+\alpha+1}{2}$ et $\zeta' = \binom{\frac{n}{2}-\alpha+1}{2}$. Alors l'image directe $\rho_*(c_1(\Gamma)^k \cdot s_l(\Gamma \boxtimes S^{\frac{n}{2}+\alpha} Q^*))$ est éventuellement non nulle si et seulement si en posant $l+k = n - 2\alpha - 2 + \lambda$, on a $0 \leq \lambda \leq 4$, et dans ce cas est égale à

$$\boxed{\frac{1}{\zeta' + 1} \sum_{\substack{0 \leq l_0 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq l \\ \lambda - 2 \leq l_0 + (l_3 - l_2) \leq \min(\lambda, 2)}} f_{\alpha, n}(\mathbf{l}, k) \tau_1^{\lambda - l_0 - (l_3 - l_2)} \cdot \tau_2^{l_0 + (l_3 - l_2)}}$$

où la notation $\underline{1}$ désigne le vecteur (l_0, l_1, l_2, l_3) et où la fonction numérique $f_{\alpha, n}(\underline{1}, k)$ dépendant des paramètres l, k, α, n est égale à

$$f_{\alpha, n}(\underline{1}, k) = (-1)^{l_0+l_1+l_3} \binom{\frac{n}{2}+\alpha+l_2}{l_2-l_1} \binom{\frac{n}{2}+\alpha+l_1}{l_1-l_0} \binom{\frac{n}{2}+\alpha+l-l_2}{l-l_3} \binom{\zeta}{l_0} \binom{\zeta}{l_3-l_2} \sum_{\substack{0 \leq a \leq l_1-l_0+k \\ 0 \leq b \leq l+l_2-l_1-l_3}} \binom{l_1+k-l_0}{a} \binom{\zeta'+1}{\frac{n}{2}-\alpha+\lambda+l_2-l_0-l_3-a-b} \binom{\zeta'+1}{a+b+\alpha+1-\frac{n}{2}} (n-2\alpha-1+l_2-l_0-l_3-2a-2b+\lambda)$$

On déduit de cette formule que si ρ désigne cette fois la projection $G \longrightarrow \mathbf{P}_2^*$, l'image directe $\rho_*(c_1(\Gamma)^k \cdot s_l(\Gamma \otimes S^{\frac{n}{2}+\alpha} Q^*))$ (le produit tensoriel remplace le produit tensoriel externe dans le second facteur) est égale à

$$\frac{1}{\zeta'+1} g_{\alpha, n}(l, k) \tau^\lambda$$

où $g_{\alpha, n}(l, k) = \sum_{\underline{1}} f_{\alpha, n}(\underline{1}, k)$, la somme portant sur les quadruplets $\underline{1}$ vérifiant les inégalités ci-dessus. Naturellement si $\lambda > 2$ cette classe est nulle.

Pour montrer le lemme 11 nous montrerons deux résultats préliminaires. Le premier est une conséquence assez facile de l'exemple 3.1.1 de [F]. Le second est un calcul d'image directe qui se mène de manière classique en faisant appel à une variété de drapeaux relative.

Lemme 12. Soit E un fibré vectoriel de rang 2 et F un fibré vectoriel de rang $f+1 > 0$ sur une variété projective X . Soit $k \geq 0$ un entier. Alors $s_k(E \otimes F)$ est égal à

$$\sum_{0 \leq k_0 \leq k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq k} (-1)^{k_1+k_2} \binom{f+k_2}{k_2-k_1} \binom{f+k-k_2}{k-k_3} \binom{f+k_1}{k_1-k_0} s_{k_0}(F) \cdot s_{k_3-k_2}(F) \cdot c_1(E)^{k_1-k_0} \cdot s_{k+k_2-k_1-k_3}(E)$$

Preuve On se place sur le fibré projectif $\mathbf{P}(E) \xrightarrow{\pi} X$ qui paramètre les droites vectorielles des fibres de E . Soit L le fibré inversible quotient de $\pi^*(E)$, on note l sa classe de Chern. On a la suite exacte de fibrés

$$0 \longrightarrow \pi^*(\Lambda^2 E) \otimes L^* \longrightarrow \pi^*(E) \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

On a $\pi_*(s_k(\pi^*(E) \otimes \pi^*(F)) \cdot l) = s_k(E \otimes F)$. On a alors $s_k(\pi^*(E \otimes F)) = \sum_{0 \leq k_2 \leq k} s_{k_2}(\pi^*(\Lambda^2 E \otimes F) \otimes L^*) \cdot s_{k-k_2}(\pi^*(F) \otimes L)$, ceci étant égal d'après [F] ex.3.1.1 à

$$\sum_{0 \leq k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq k} (-1)^{k_1+k_2} \binom{f+k_2}{k_2-k_1} \binom{f+k-k_2}{k-k_3} s_{k_1}(\pi^*(\Lambda^2 E \otimes F)) \cdot s_{k_3-k_2}(\pi^*(F)) \cdot l^{k+k_2-k_1-k_3}$$

En écrivant $s_{k_1}(\Lambda^2 E \otimes F) = \sum_{0 \leq k_0 \leq k_1} \binom{f+k_1}{k_1-k_0} s_{k_0}(F) \cdot c_1(\Lambda^2 E)^{k_1-k_0}$. On conclut grâce à l'identité $s_{k+k_2-k_1-k_3}(E) = \pi_*(l^{k+k_2-k_1-k_3+1})$. ■

Soit à présent \mathcal{E} un fibré vectoriel de rang e sur une variété projective X . Soit $G(2, \mathcal{E})$ le fibré en grassmanniennes au dessus de X paramétrant les plans vectoriels des fibres de \mathcal{E} . Soit Γ le sous-fibré tautologique. On note $\mathcal{D}^{1,2}(\mathcal{E})$ la variété de drapeaux paramétrant les couples $(\Gamma', \Gamma'' = \Gamma/\Gamma')$ avec $\dim \Gamma' = \dim \Gamma'' = 1$, et $\Gamma' \subset \mathcal{E}_x$ pour $x \in X$ et $\Gamma'' \subset \mathcal{E}_x/\Gamma'$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^{1,2}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\tau} & G(2, \mathcal{E}) \\ \tau' \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbf{P}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\pi'} & X \end{array}$$

où les morphismes sont les projections naturelles, et $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ le fibré projectif paramétrant les droites vectorielles des fibres de \mathcal{E} . Soient δ, ϵ deux entiers positifs.

Proposition 12. Avec les notations qui précèdent

$$\pi_*(c_1(\mathbf{\Gamma})^\delta \cdot s_\epsilon(\mathbf{\Gamma})) = \sum_{\substack{0 \leq d \leq \delta \\ 0 \leq e \leq \epsilon}} \binom{\delta}{d} \begin{vmatrix} s_{\delta+\epsilon-d-e+2-rg(\mathcal{E})}(\mathcal{E}) & s_{d+e+1-rg(\mathcal{E})}(\mathcal{E}) \\ s_{\delta+\epsilon-d-e+3-rg(\mathcal{E})}(\mathcal{E}) & s_{d+e+2-rg(\mathcal{E})}(\mathcal{E}) \end{vmatrix}$$

Preuve Soit L' le fibré π' -ample sur $\mathbf{P}(\mathcal{E})$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow L'^\vee \longrightarrow \pi'^*(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow 0$$

ainsi que

$$0 \longrightarrow L''^\vee \longrightarrow \tau'^*(\mathcal{E}') \longrightarrow \mathcal{E}'' \longrightarrow 0$$

et enfin l'extension

$$0 \longrightarrow \tau'^*(L'^\vee) \longrightarrow \tau^*(\mathbf{\Gamma}) \longrightarrow L''^\vee \longrightarrow 0$$

Notant l', l'' les classes de Chern de L' et L'' on obtient ainsi les relations sur les classes de Chern et de Segré

$$c_1(\tau^*(\mathbf{\Gamma})) = -\tau'^*(l') - l''$$

On a de plus

$$s_\epsilon(\tau^*(\mathbf{\Gamma})) = (-1)^\epsilon \sum_{e=0}^{\epsilon} \tau'^*(l'^e) \cdot l''^{\epsilon-e}$$

La classe $c_1(\mathbf{\Gamma})^\delta \cdot s_\epsilon(\mathbf{\Gamma})$ est de plus égale à $-\tau_*(c_1(\tau^*(\mathbf{\Gamma}))^\delta \cdot s_\epsilon(\tau^*(\mathbf{\Gamma})) \cdot l'')$. La classe de l'énoncé est donc égale à

$$- \sum_{\substack{0 \leq d \leq \delta \\ 0 \leq e \leq \epsilon}} (-1)^{\delta+\epsilon} \binom{\delta}{d} \pi'_* \tau'_*(\tau'^*(l'^{d+e}) \cdot l''^{\delta+\epsilon-d-e+1})$$

du fait de la commutativité du diagramme ci-dessus. La formule de projection donne alors

$$\begin{aligned} \pi'_* \tau'_*(\tau'^*(l'^{d+e}) \cdot l''^{\delta+\epsilon-d-e+1}) &= \pi'_*(l'^{d+e} \cdot \tau'_*(l''^{\delta+\epsilon-d-e+1})) \\ &= \pi'_*(l'^{d+e} \cdot s_{\delta+\epsilon-d-e+1-rg(\mathcal{E}'')}(\mathcal{E}'')) \\ &= s_{d+e-rg(\mathcal{E}')(\mathcal{E}^\vee)} \cdot s_{\delta+\epsilon-d-e+1-rg(\mathcal{E}'')}(\mathcal{E}^\vee) - \\ &\quad s_{d+e+1-rg(\mathcal{E}')(\mathcal{E}^\vee)} \cdot s_{\delta+\epsilon-d-e-rg(\mathcal{E}'')}(\mathcal{E}^\vee) \end{aligned}$$

On a par définition $rg(\mathcal{E}') = rg(\mathcal{E}) - 1$ et $rg(\mathcal{E}'') = rg(\mathcal{E}) - 2$. En tenant compte du fait que $s_k(\mathcal{E}^\vee) = (-1)^k s_k(\mathcal{E})$ on peut conclure. ■

Preuve (du lemme 11) Dans ce cas le fibré \mathcal{E} est le fibré $S^{\frac{n}{2}-\alpha}Q$ sur \mathbf{P}_2^* . Posant $\zeta' = (\frac{n}{2}-\alpha+1)$ il vient $s_k(S^{\frac{n}{2}-\alpha}Q) = \binom{\zeta'}{k} \tau^k$, et donc les mineurs intervenant dans la formule de la proposition 12 sont égaux à

$$\begin{vmatrix} \binom{\zeta'}{\delta+\epsilon-d-e+1-\frac{n}{2}+\alpha} & \binom{\zeta'}{d+e-\frac{n}{2}+\alpha} \\ \binom{\zeta'}{\delta+\epsilon-d-e+2-\frac{n}{2}+\alpha} & \binom{\zeta'}{d+e+1-\frac{n}{2}+\alpha} \end{vmatrix} \tau^{\delta+\epsilon+2-n+2\alpha}$$

c'est-à-dire, compte tenu de l'identité (calcul direct)

$$\binom{\zeta'}{a} \binom{\zeta'}{b+1} - \binom{\zeta'}{a+1} \binom{\zeta'}{b} = \frac{a-b}{\zeta'+1} \binom{\zeta'+1}{a+1} \binom{\zeta'+1}{b+1}$$

égaux à

$$\frac{\delta + \epsilon - 2d - 2e + 1}{\zeta' + 1} \binom{\zeta' + 1}{\delta + \epsilon - d - e + 2 - \frac{n}{2} + \alpha} \binom{\zeta' + 1}{d + e + 1 - \frac{n}{2} + \alpha} \tau^{\delta + \epsilon + 2 - n + 2\alpha}$$

D'après le lemme 12 on peut écrire

$$s_l(\Gamma \boxtimes S^{\frac{n}{2} + \alpha} Q^*) = \sum_{0 \leq l_0 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq l} (-1)^{l_1 + l_2} \binom{\frac{n}{2} + \alpha + l_2}{l_2 - l_1} \binom{\frac{n}{2} + \alpha + l_1}{l_1 - l_0} \binom{\frac{n}{2} + \alpha + l - l_2}{l - l_3} \\ s_{l_0}(S^{\frac{n}{2} + \alpha} Q^*) \cdot s_{l_3 - l_2}(S^{\frac{n}{2} + \alpha} Q^*) \cdot c_1(\Gamma)^{l_1 - l_0} \cdot s_{l + l_2 - l_1 - l_3}(\Gamma)$$

On a $s_k(S^{\frac{n}{2} + \alpha} Q^*) = (-1)^k \binom{\zeta}{k} \tau_2^k$ où ζ est le nombre $\binom{\frac{n}{2} + \alpha + 1}{2}$. On pose de même $\zeta' = \binom{\frac{n}{2} - \alpha + 1}{2}$. D'après le lemme 12, l'image directe de la classe $c_1(\Gamma)^{l_1 - l_0 + k} \cdot s_{l + l_2 - l_1 - l_3}(\Gamma)$ par le morphisme de projection naturel $G \rightarrow \mathbf{P}_2^*$ est donné par

$$\sum_{\substack{0 \leq a \leq l_1 - l_0 + k \\ 0 \leq b \leq l + l_2 - l_1 - l_3}} \binom{l_1 + k - l_0}{a} \left| \begin{array}{cc} \binom{l + l_2 + k + \alpha + 1 - a - b - l_0 - l_3 - \frac{n}{2}}{\zeta'} & \binom{a + b + \alpha - \frac{n}{2}}{\zeta'} \\ \binom{l + l_2 + k + \alpha + 2 - a - b - l_0 - l_3 - \frac{n}{2}}{\zeta'} & \binom{a + b + \alpha + 1 - \frac{n}{2}}{\zeta'} \end{array} \right| \tau_1^{l + l_2 + k + 2\alpha + 2 - l_0 - l_3 - n}$$

Les déterminants 2×2 précédents sont égaux à

$$\frac{l + l_2 + k + 1 - l_0 - l_3 - 2a - 2b}{\zeta' + 1} \binom{\zeta' + 1}{l + l_2 + k + \alpha + 2 - a - b - l_0 - l_3 - \frac{n}{2}} \binom{\zeta' + 1}{a + b + \alpha + 1 - \frac{n}{2}}$$

On arrive donc au résultat énoncé dans le lemme. ■

Après réindexation $l := l, m := m - (n + 2\alpha + 3)$ on obtient donc

$$\Delta_A^* = \frac{(-1)^{n+2\alpha+3}}{\zeta'+1} \sum_{\substack{0 \leq l_0 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq l \leq m \leq n - 2\alpha + 2 \\ m - l \leq 4 \\ 2 - (m - l) \leq l_0 + (l_3 - l_2) \leq \min(4 - (m - l), 2)}} (-1)^m \binom{2n+5}{n-2\alpha+2-m} f_{\alpha,n}(l_0, l_1, l_2, l_3, n - 2\alpha + 2 - m) \left[\frac{[1 + (\frac{n}{2} - \alpha)\tau_1 + (\frac{n}{2} + \alpha)\tau_2]^m \cdot \delta}{1+u} \right]_{2-l_0-(l_3-l_2)}^{l_0+(l_3-l_2)+(m-l)-2}$$

où la notation $[\gamma(\tau_1, \tau_2)]_y^x$ désigne le coefficient se trouvant devant le terme $\tau_1^x \cdot \tau_2^y$ dans le développement en série formelle d'une fraction rationnelle $\gamma(\tau_1, \tau_2)$. Notons que pour $\alpha = 1/2, 1$ on a $\Delta_A = \Delta_A^*$, et on pose dans l'expression ci-dessus $u = -\tau_2, u = \tau_1$ respectivement.

Calculons maintenant Δ_A^{**} (on suppose donc $\alpha \geq 3/2$). Ceci correspond à la contribution à Δ_A des termes $-a_{i-j} \tau^{i-j-2}$ apparaissant dans les classes $(\pi_-)_*(l_-^{i-j})$ (cf lemme 10). Plus précisément

on a

$$\begin{aligned}
\Delta_A^{**} &= -2(\alpha - 1)^2 \sum_{0 \leq j \leq i \leq 2n+4} \binom{2n+5}{i+1} (-1)^{i+j} (i-j) (i-j-1) (2\alpha - 1)^{i-j-2} \\
&\quad \tau^{i-j-2} \cdot (n\tau - \gamma_1)^{2n+4-i} \cdot s_{j-n-2\alpha-2}(\mathcal{E}^\vee) \cap [G] \\
&= -2(\alpha - 1)^2 \sum_{n+2\alpha+5 \leq j \leq i \leq 2n+5} \binom{2n+5}{i} (-1)^{i-j} (i-j+2) (i-j+1) \\
&\quad [(2\alpha - 1)\tau]^{i-j} \cdot (n\tau - \gamma_1)^{2n+5-i} \cdot s_{j-n-2\alpha-5}(\mathcal{E}^\vee) \cap [G] \\
&= -2(\alpha - 1)^2 \left[(1 + n\tau - \gamma_1)^{2n+5} \cdot \left(\sum_k (k+1)(k+2) [(1-2\alpha)\tau]^k \right) \cdot s(\mathcal{E}^\vee) \right]_{n-2\alpha} \cap [G]
\end{aligned}$$

Posons $\zeta = (1 - 2\alpha)\tau$, on a

$$\sum_{k \geq 0} (k+1)(k+2)\zeta^k = \left(\sum_k \zeta^k \right)^{(2)} = \left(\frac{1}{1-\zeta} \right)^{(2)} = \frac{2}{(1-\zeta)^3}$$

où la notation $()^{(2)}$ désigne la dérivée seconde de l'expression entre parenthèses. On pose δ la classe $(1 + \tau)^{-\binom{2\alpha+3}{2}} \cdot (1 - \tau)^{-\binom{2\alpha+1}{2}}$. On a donc

$$\begin{aligned}
&-2(\alpha - 1)^2 (1 + n\tau - \gamma_1)^{2n+5} \cdot \frac{2}{(1+(2\alpha-1)\tau)^3} \cdot s(\mathcal{E}^\vee) = 4(\alpha - 1)^2 \sum_{0 \leq m \leq 2n+5} \binom{2n+5}{m} (-1)^m \left[\frac{(1+n\tau)^m \cdot \delta}{(1+(2\alpha-1)\tau)^3} \right] \\
&\quad \cdot \gamma_1^{2n+5-m} \cdot \left(\sum_l s_l(\mathbf{\Gamma} \otimes S^{\frac{n}{2}+\alpha} Q^*) \right) \\
&= \frac{4(\alpha - 1)^2}{\zeta' + 1} \sum_{\substack{0 \leq m \leq 2n+5 \\ l}} \binom{2n+5}{m} (-1)^m g_{\alpha,n}(l, 2n+5-m) \left[\frac{(1+n\tau)^m \cdot \delta}{(1+(2\alpha-1)\tau)^3} \right] \tau^{n+2\alpha+7-m+l}
\end{aligned}$$

On a introduit la fonction $g_{\alpha,n}$ au lemme 11. Pour calculer Δ_A^{**} on ne retient que les couples (m, l) tels que $m - (n + 2\alpha + 7) \leq l \leq m - (n + 2\alpha + 5)$; finalement en réindexant la somme ci-dessus par $m := m - (n + 2\alpha + 5)$ et $p := l - m + (n + 2\alpha + 7)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta_A^{**} &= \\
&\frac{4(\alpha-1)^2}{\zeta'+1} \sum_{\substack{0 \leq m \leq n-2\alpha \\ (2-m)_+ \leq p \leq 2}} \binom{2n+5}{n-2\alpha-m} (-1)^m g_{\alpha,n}(m+p-2, n-2\alpha-m) \left[\frac{(1+n\tau)^m \cdot \delta}{(1+(2\alpha-1)\tau)^3} \right]_{2-p}
\end{aligned}$$

où la notation $[\gamma(\tau)]_x$ désigne le coefficient devant le terme τ^x dans le développement de la fraction rationnelle $\gamma(\tau)$.

Calculons Δ_B . On a encore un morphisme canonique $B' \longrightarrow B \times_\Sigma \Sigma_+$, qui est birationnel sur son image $B'' \subseteq B \times_\Sigma \Sigma_+$ qui est un fermé intègre de codimension $2\alpha - 4$. En effet la dimension du produit fibré est $n - 2 + n + 2\alpha + 2 = 2n + 2\alpha$. Lorsque $\alpha = 2$, le fermé B'' est tout le produit fibré. Lorsque $\alpha = 5/2$ c'est une hypersurface. Nous désirons connaître en toute généralité la classe fondamentale $[B'']$ du fermé B'' : celle-ci est bien définie car le produit fibré est lisse.

Proposition 13. Avec les notations ci-dessus, on a

$$[B''] = \left[\frac{c(L_-^{\otimes 2} \otimes L_+ \otimes S^{2\alpha-3} Q^*)}{c(L_- \otimes L_+ \otimes Q(1))} \right]_{2\alpha-4}$$

Preuve Soient Λ' et Λ'' les familles de systèmes cohérents paramétrées par la variété Σ (cf notations de la proposition 5). On a une suite exacte de familles

$$0 \longrightarrow L_- \otimes \Lambda' \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Lambda'' \longrightarrow 0 \quad (+)$$

où Λ est une famille paramétrant les systèmes cohérents dont la classe appartient à Σ_- . On restreint cette suite exacte à la composante B . La suite exacte $(+)$ définit une filtration de Λ et il en résulte une suite exacte longue de faisceaux $\underline{\text{Ext}}$ relatifs filtrés (voir [L] chap. 15.3 ou [HL] annexe du chap. 2 pour les définitions)

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_{p,-}^1(\Lambda, \Lambda) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_p^1(\Lambda, \Lambda) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_{p,+}^1(\Lambda, \Lambda) \longrightarrow \\ \underline{\text{Ext}}_{p,-}^2(\Lambda, \Lambda) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_p^2(\Lambda, \Lambda) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_{p,+}^2(\Lambda, \Lambda) \longrightarrow 0 \quad (++) \end{aligned}$$

Le morphisme p dans la suite exacte qui précède est la première projection $B \times \mathbf{P}_2 \longrightarrow B$. On a $\underline{\text{Ext}}_{p,+}^2(\Lambda, \Lambda) = 0$, d'après la suite spectrale classique aboutissant vers un groupe Ext filtré. Le faisceau $\underline{\text{Ext}}_p^2(\Lambda, \Lambda)$ est de support le fermé Σ'_- , en utilisant les notations de la proposition 10. On a d'autre part $\underline{\text{Ext}}_{p,+}^1(\Lambda, \Lambda) \simeq L_-^\vee \otimes \underline{\text{Ext}}_p^1(\Lambda', \Lambda'')$, et le morphisme $\underline{\text{Ext}}_{p,-}^1(\Lambda, \Lambda) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_p^1(\Lambda, \Lambda)$ est celui de l'inclusion du faisceau tangent à Σ_- dans le faisceau tangent de \mathcal{S}_- restreint à B (voir proposition 4). D'après le théorème 9 et la proposition 10, le faisceau $\underline{\text{Ext}}_p^2(\Lambda, \Lambda)$ est de support le fermé Σ'_- qui est de codimension ≥ 2 dans B . Notons W le faisceau image du morphisme $\underline{\text{Ext}}_{p,+}^1(\Lambda, \Lambda) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_{p,-}^2(\Lambda, \Lambda)$; on a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_{p,-}^2(\Lambda, \Lambda) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_p^2(\Lambda, \Lambda) \longrightarrow 0$$

Appliquons alors le foncteur $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_B}(\square, \mathcal{O}_B)$ à cette suite exacte, comme le faisceau $\underline{\text{Ext}}_p^2(\Lambda, \Lambda)$ a un support de codimension ≥ 2 dans B qui est lisse, on a $W^\vee \simeq \underline{\text{Ext}}_{p,-}^2(\Lambda, \Lambda)^\vee$. On se place sur le projectif au sens de Grothendieck $\mathbb{P}(\underline{\text{Ext}}_{p,+}^1(\Lambda, \Lambda)^\vee)$, qui est isomorphe à $B \times_\Sigma \Sigma_+$; sur cette variété on a d'après ce qui précède un morphisme $W^\vee \longrightarrow L_- \otimes L_+$, autrement dit une section du faisceau $\underline{\text{Ext}}_{p,-}^2(\Lambda, \Lambda)^{\vee\vee} \otimes L_- \otimes L_+$ dont le schéma des zéros est précisément le fermé B'' .

Lemme 13. *Le faisceau $\underline{\text{Ext}}_{p,-}^2(\Lambda, \Lambda)$ sur B est conoyau d'un morphisme de fibrés vectoriels*

$$\iota : Q(1) \longrightarrow S^{2\alpha-3}Q^* \otimes L_-$$

qui est génériquement injectif. Son lieu singulier est l'intersection $B \cap A$ et il est localement libre de rang $2\alpha - 4$ sur $B \setminus A$. De plus ce faisceau est sans torsion lorsque $\alpha = 5/2$ et réflexif lorsque $\alpha > 5/2$.

Preuve Ceci vient de la suite spectrale convergeant vers $\underline{\text{Ext}}_{p,-}^2(\Lambda, \Lambda)$: en effet ce dernier est conoyau de la différentielle

$$d^{0,1} : E_1^{0,1} = \underline{\text{Ext}}_p^1(\Lambda', \Lambda') \oplus \underline{\text{Ext}}_p^1(\Lambda'', \Lambda'') \longrightarrow E_1^{1,1} = L_- \otimes \underline{\text{Ext}}_p^2(\Lambda'', \Lambda')$$

Notons que le noyau de $d^{0,1}$ est le faisceau $\underline{\text{Ext}}_{p,-}^1(\Lambda, \Lambda)$, qui est isomorphe au faisceau tangent de B . L'inclusion $\text{Ker}(d^{0,1}) \subseteq E_1^{0,1}$ s'identifie à la différentielle $d\pi_-$ de la projection $\pi_- : \Sigma_- \longrightarrow \Sigma$, restreinte à la composante B . L'image de $d\pi_-$ est égale en tout point de $B \setminus A$ à l'espace tangent de la sous-variété de Σ d'idéal \mathcal{J} (voir définition 19), et en chaque point de $A \cap B$ contient un tel espace tangent.

C'est donc que $d^{0,1}$ se factorise en un morphisme injectif de faisceaux $\iota : Q(1) \longrightarrow S^{2\alpha-3}Q^* \otimes L_-$, car $Q(1)$ est le fibré normal $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$, et $\underline{\text{Ext}}_{p,-}^2(\Lambda, \Lambda)$ est le conoyau de ι . De plus ι est un morphisme injectif au sens des fibrés sur $B \setminus A$, ce qui prouve le lemme: en effet quand $\alpha = 5/2$ le fermé $A \cap B$ est de codimension 2 dans B qui est lisse, et quand $\alpha > 5/2$ cette codimension est ≥ 3 . ■

Revenant à la preuve de la proposition 13, le faisceau $\underline{\text{Ext}}_{p,-}^2(\Lambda, \Lambda)^{\vee\vee}$ coïncide toujours avec $\underline{\text{Ext}}_{p,-}^2(\Lambda, \Lambda)$ sur $B \setminus A$ dont le complémentaire dans B est de codimension $2\alpha - 3 > 2\alpha - 4$, c'est donc que la classe fondamentale de B'' est égale à

$$[B''] = c_{2\alpha-4}(\underline{\text{Ext}}_{p,-}^2(\Lambda, \Lambda) \otimes L_- \otimes L_+)$$

ce qui termine la preuve de la proposition compte tenu du lemme. ■

Revenons au calcul de Δ_B . On se doit de calculer pour tout couple (i, j) d'entiers tels que $0 \leq i \leq 2n + 4, 0 \leq j \leq i$, le nombre d'intersection $v^{2n+4-i} \cdot l_+^j \cdot l_-^{i-j} \cap [B']$. On a un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 B' & \xrightarrow{\quad} & B'' \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & B \times_{\Sigma} \Sigma_+ \\
 \swarrow \varphi_- & & \searrow \varphi_+ \\
 B & & \Sigma_+ \\
 \searrow \pi_- & & \swarrow \pi_+ \\
 & \Sigma &
 \end{array}$$

où la flèche horizontale est birationnelle. Du fait que sur B, B' et B'' on a $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, on peut écrire en notation additive $v = n\tau - \gamma_1$. Posons \mathcal{F} le faisceau cohérent $\underline{\text{Ext}}_{p,-}^2(\Lambda, \Lambda)$ intervenant dans le lemme 13. On a donc

$$\Delta_B = \sum_{0 \leq j \leq i \leq 2n+4} \binom{2n+5}{i+1} (-1)^{i-j} v^{2n+4-i} \cdot l_-^{i-j} \cdot l_+^j \cdot c_{2\alpha-4}(\mathcal{F} \otimes L_- \otimes L_+) \cap [B \times_{\Sigma} \Sigma_+]$$

Sur $B \setminus A$ le faisceau cohérent \mathcal{F} est localement libre de rang $2\alpha - 4$, on peut donc écrire d'après [F] ex.3.2.2

$$c_{2\alpha-4}(\mathcal{F} \otimes L_- \otimes L_+) = \sum_{0 \leq k \leq 2\alpha-4} c_{2\alpha-4-k}(\mathcal{F} \otimes L_-) \cdot l_+^k$$

Comme au paragraphe précédent on réindexe la somme en posant $i := i + 1, j := j + 1$, ce qui donne

$$\Delta_B = \sum_{\substack{1 \leq j \leq i \leq 2n+5 \\ 0 \leq k \leq 2\alpha-4}} \binom{2n+5}{i} v^{2n+5-i} \cdot (-1)^{i-j} l_-^{i-j} \cdot c_{2\alpha-4-k}(\mathcal{F} \otimes L_-) \cdot l_+^{j+k-1} \cap [B \times_{\Sigma} \Sigma_+]$$

Les classes $v^{2n+5-i} \cdot l_-^{i-j} \cdot c_{2\alpha-4-k}(\mathcal{F} \otimes L_-)$ proviennent du fermé B qui est de dimension $n - 2$; elles ne sont non nulles que lorsque l'inégalité suivante sur les indices est vérifiée

$$(2n + 5 - i) + (i - j) + (2\alpha - 4 - k) = 2n + 2\alpha + 1 - (j + k) \leq n - 2$$

c'est-à-dire $j + k \geq n + 2\alpha + 3$. L'exclusion des indices $(j \leq i)$ tels que $i = 0$ ou $i > 0$ et $j = 0$ dans la somme précédente n'est donc que factice, et on peut écrire, après avoir appliqué **seulement** l'image directe $(\pi_+)_*$ aux termes l_+^{j+k-1}

$$\Delta_B = \left[(1 + v)^{2n+5} \cdot \frac{c(\mathcal{F} \otimes L_-)}{1 + l_-} \cdot \delta \cdot s(\Gamma \otimes S^{\frac{n}{2}+\alpha} Q^*) \right]_{n-2} \cap [B]$$

où δ désigne la classe $(1 + \tau)^{-\binom{2\alpha+3}{2}} \cdot (1 - \tau)^{-\binom{2\alpha+1}{2}}$. De la suite exacte suivante sur $B \setminus A$

$$0 \longrightarrow Q(1) \otimes L_- \longrightarrow S^{2\alpha-3} Q^* \otimes L_-^{\otimes 2} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes L_- \longrightarrow 0$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} c(\mathcal{F} \otimes L_-) &= \frac{c(S^{2\alpha-3}Q^* \otimes L_-^{\otimes 2})}{c(Q(1) \otimes L_-)} \\ &= \frac{(1+2l_-)^{\binom{2\alpha-1}{2}}}{(1+\tau+2l_-)^{\binom{2\alpha-2}{2}} \cdot c(Q(1) \otimes L_-)} \\ &= \frac{(1+2l_-)^{\binom{2\alpha-1}{2}} \cdot (1+l_-)}{(1+\tau+2l_-)^{\binom{2\alpha-2}{2}} \cdot (1+\tau+l_-)^3} \end{aligned}$$

On cherche à présent à développer la classe $\frac{(1+2l_-)^{\binom{2\alpha-1}{2}}}{(1+\tau+2l_-)^{\binom{2\alpha-2}{2}} \cdot (1+\tau+l_-)^3}$ sous forme d'une série en l_- ; on obtient

$$\frac{(1+2l_-)^{\binom{2\alpha-1}{2}}}{(1+\tau+2l_-)^{\binom{2\alpha-2}{2}} \cdot (1+\tau+l_-)^3} = \frac{1}{(1+\tau)^{3+\binom{2\alpha-2}{2}}} \cdot \frac{(1+2l_-)^{\binom{2\alpha-1}{2}}}{\left[1 + \left(\frac{l_-}{1+\tau}\right)\right]^3 \cdot \left[1 + \left(\frac{2l_-}{1+\tau}\right)\right]^{\binom{2\alpha-2}{2}}}$$

ceci étant encore égal à

$$\frac{(1+2l_-)^{\binom{2\alpha-1}{2}}}{(1+\tau)^{3+\binom{2\alpha-2}{2}}} \cdot \left(\sum_{p \geq 0} (-1)^p \binom{2+p}{2} \frac{l_-^p}{(1+\tau)^p} \right) \left(\sum_{m \geq 0} (-1)^m \left(\binom{2\alpha-2}{2} - 1 + m \right) \frac{2^m l_-^m}{(1+\tau)^m} \right)$$

c'est-à-dire, en posant $k := m + p$ et $l := m$ dans les sommes ci-dessus

$$\begin{aligned} &\frac{(1+2l_-)^{\binom{2\alpha-1}{2}}}{(1+\tau)^{3+\binom{2\alpha-2}{2}}} \cdot \sum_{0 \leq l \leq k} (-1)^k \binom{2+k-l}{2} \left(\binom{2\alpha-2}{2} - 1 + l \right) 2^l \frac{l_-^k}{(1+\tau)^k} = \\ &\frac{1}{(1+\tau)^{3+\binom{2\alpha-2}{2}}} \cdot \sum_{0 \leq l \leq k \leq m} (-1)^k \binom{2+k-l}{2} \left(\binom{2\alpha-2}{2} - 1 + l \right) \binom{2\alpha-1}{m-k} 2^{m+l-k} \frac{l_-^m}{(1+\tau)^k} \end{aligned} \quad (1)$$

On a d'autre part

$$(\pi_-)_*(l_-^m) = s_{m-2\alpha+2}(S^{2\alpha-2}Q(1)) = \binom{\binom{2\alpha}{2} + m - 2\alpha + 1}{\binom{2\alpha}{2} - 1} \tau^{m-2\alpha+2}$$

Pour que cette classe soit non nulle, on doit donc se restreindre à $2\alpha - 2 \leq m \leq 2\alpha$. Enfin en posant $\rho : G \longrightarrow \mathbf{P}_2^*$ le morphisme structural du fibré en grassmaniennes (cf lemme 11) on a

$$\begin{aligned} &\rho_* \left((1+n\tau - \gamma_1)^{2n+5} \cdot s(\Gamma \otimes S^{\frac{n}{2}+\alpha}Q^*) \right) = \\ &\sum_{\substack{n-2\alpha-2 \leq p+l \leq n-2\alpha \\ p, l \geq 0}} (-1)^p \binom{2n+5}{p} (1+n\tau)^{2n+5-p} \cdot \rho_* \left(\gamma_1^p \cdot s_l(\Gamma \otimes S^{\frac{n}{2}+\alpha}Q^*) \right) = \\ &\sum_{\substack{n-2\alpha-2 \leq p+l \leq n-2\alpha \\ p, l \geq 0}} \frac{(-1)^p}{\zeta'+1} \binom{2n+5}{p} g_{\alpha,n}(l,p) (1+n\tau)^{2n+5-p} \cdot \tau^{p+l+2\alpha+2-n} \end{aligned}$$

L'expression précédente se réécrit, avec la réindexation $p := p$; $q := p + l - (n - 2\alpha - 2)$

$$\frac{1}{\zeta'+1} \sum_{\substack{0 \leq q \leq 2 \\ 0 \leq p \leq q + (n - 2\alpha - 2)}} (-1)^p \binom{2n+5}{p} g_{\alpha,n}(q+n-2\alpha-2-p,p) (1+n\tau)^{2n+5-p} \cdot \tau^q \quad (2)$$

On réindexe la somme dans l'expression (1) en posant $m := m - (2\alpha - 2)$; en combinant avec l'expression (2) on obtient

$$\Delta_B = \frac{2^{2\alpha-2}}{\zeta'+1} \sum_{\substack{0 \leq m, q; m+q \leq 2 \\ 0 \leq l \leq k \leq m+2\alpha-2 \\ 0 \leq p \leq q+n-2\alpha-2}} (-1)^{k+p} \binom{2+k-l}{2} \binom{\binom{2\alpha-2}{2}-1+l}{\binom{2\alpha-2}{2}-1} \binom{\binom{2\alpha-1}{2}}{m-k+2\alpha-2} \\ \binom{\binom{2\alpha}{2}+m-1}{\binom{2\alpha}{2}-1} \binom{2n+5}{p} 2^{m+l-k} g_{\alpha,n}(q-p+n-2\alpha-2, p) \\ \left[\frac{(1+n\tau)^{2n+5-p}}{(1-\tau)^{\binom{2\alpha+1}{2}}} \cdot \frac{1}{(1+\tau)^{k+3+2(2\alpha+3)}} \right]_{2-m-q}$$

où la notation $[f(\tau)]_x$ désigne la partie de degré x dans le développement en série formelle d'une fraction rationnelle $f(\tau)$.

4.4. Quelques applications numériques. Dans ce paragraphe nous appliquons les formules précédentes. Les résultats sont notés dans le tableau ci-dessous. Nous n'avons bien sûr pas pu nous passer d'un logiciel de calcul, en l'occurrence Maple. Nous faisons d'abord quelques commentaires.

Pour $n = 4$: il n'y a qu'un seul saut à calculer à la valeur $\alpha = 1$. Le fermé Σ_- est lisse irréductible, isomorphe à $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$, et le saut Δ est égal à $\Delta_A = \Delta_A^*$. D'après ce qui précède, on a

$$\Delta_A^* = \frac{-1}{2} \sum_{\substack{0 \leq l_0 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq l \leq m \leq 4 \\ 2 - (m-l) \leq l_0 + (l_3 - l_2) \leq \min\{4 - (m-l), 2\}}} (-1)^m \binom{13}{4-m} f_{1,4}(l_0, l_1, l_2, l_3, 4-m) \\ \left[\frac{(1+\tau_1+3\tau_2)^m \cdot (1+\tau_1-\tau_2)^3}{(1+\tau_1)^{11} \cdot (1-\tau_2)^3} \right]_{2-l_0-(l_3-l_2)}^{l_0+(l_3-l_2)+(m-l)-2}$$

où la fonction $f_{1,4}(l_0, l_1, l_2, l_3, 4-m)$ dépend du paramètre entier l et a pour expression celle donnée au lemme 11, et est une somme de $(l_1 - l_0 + 5 - m)(l - l_3 + l_2 - l_1 + 1)$ termes. Le calcul de Δ requiert ici environ une centaine de sommations.

Pour $n = 5$: il y a deux sauts à calculer aux valeurs $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{3}{2}$;

- pour $\alpha = \frac{1}{2}$, le fermé Σ_- est isomorphe à $\Sigma = \text{Grass}(2, S^2Q) \times \mathbf{P}_2^*$, qui est une fibration en plans projectifs sur $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$, et on a encore $\Delta = \Delta_A = \Delta_A^*$ avec $u = -\tau_2$;
- pour $\alpha = \frac{3}{2}$, le fermé Σ_- est isomorphe à l'éclaté de $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$ le long de la diagonale, et on a $\Delta = \Delta_A = \Delta_A^* + \Delta_A^{**}$, avec

$$\Delta_A^* = -\frac{1}{4} \sum_{\substack{0 \leq l_0 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq l \leq m \leq 6 \\ m-l \leq 4 \\ 2 - (m-l) \leq l_0 + (l_3 - l_2) \leq \min\{2, 4 - (m-l)\}}} (-1)^m \binom{15}{6-m} f_{\frac{1}{2},5}(l_0, l_1, l_2, l_3, 6-m) \\ \left[\frac{(1+2\tau_1+3\tau_2)^m \cdot (1+\tau_1-\tau_2)^3}{(1+\tau_1)^6 \cdot (1-\tau_2)^2} \right]_{2-l_0-(l_3-l_2)}^{l_0+(l_3-l_2)+(m-l)-2} \\ \Delta_A^{**} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{0 \leq m \leq 2 \\ 2-m \leq p \leq 2}} \binom{15}{2-m} (-1)^m g_{\frac{3}{2},5}(m+p-2, 2-m) \left[\frac{(1+5\tau)^m}{(1+2\tau)^3(1+\tau)^{15}(1-\tau)^6} \right]_{2-p}$$

Nous n'avons pas calculé là encore le nombre exact de sommations qui apparaissent dans Δ_A , néanmoins nous l'avons évalué à 300 pour Δ_A^* et moins de 10 pour Δ_A^{**} , en raison du fait que c'est

TABLE 1. Sauts pour $n \leq 6, \alpha \leq 2$

α	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$\frac{1}{2}$	\times	13347	\times
1	-222	\times	-444
$\frac{3}{2}$	\times	-1332	\times
2	\times	\times	213

le premier cas où ce terme supplémentaire intervient.

Pour $n = 6$: il y a également deux sauts à calculer aux valeurs $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$;

- pour $\alpha = 1$ le fermé Σ_- est encore isomorphe à $\text{Grass}(2, S^2Q) \times \mathbf{P}_2^*$ et à cette valeur critique on a $\Delta = \Delta_A = \Delta_A^*$ avec $u = \tau_1$;
- pour $\alpha = 2$ le fermé Σ_- n'est plus irréductible (c'est le premier cas ainsi), et il contient l'éclaté A de $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$ le long du carré de l'idéal de la diagonale, ainsi que la composante B isomorphe au fibré projectif $\mathbf{P}(S^2Q) \rightarrow \mathbf{P}_2^*$, tous deux de dimension 4. On a dans ce cas $\Delta = \Delta_A + \Delta_B$, avec $\Delta_A = \Delta_A^* + \Delta_A^{**}$:

(1) on pose $\zeta' = 1$, $u = 3\tau_1 + 2\tau_2$, $\delta = \frac{(1+\tau_1-\tau_2)^{15}}{(1+\tau_1)^{21} \cdot (1-\tau_2)^{10}}$ dans le calcul de Δ_A^* , et $\delta = (1+\tau_1)^{-21} \cdot (1-\tau_2)^{-10}$ dans celui de Δ_A^{**} ;

(2) pour Δ_B en appliquant la formule précédente à $n = 6$ et $\alpha = 2$ on obtient

$$\Delta_B = 2 \sum_{\substack{m+q \leq 2 \\ l \leq k \leq m+2 \\ p \leq q}} (-1)^{k+p} \binom{2+k-l}{2} \binom{3}{m-k+2} \binom{5+m}{5} \binom{17}{p} 2^{m+l-k} g_{2,6}(q-p, p) \left[\frac{(1+5\tau)^{17-p}}{(1-\tau)^{10}} \cdot \frac{1}{(1+\tau)^{k+25}} \right]_{2-m-q}$$

Les indices intervenant dans les sommes précédentes sont tous positifs. Dans ce cas $n = 6$ le nombre total de sommations nécessaires au calcul des sauts avoisine le millier.

5. CALCUL EN DESSOUS DE LA PLUS PETITE VALEUR CRITIQUE

Soit toujours un entier $n \geq 4$. Il nous reste à présent à calculer le nombre $c_1(\mathcal{D}_-)^{2n+5} \cap [\mathcal{S}_-]$, où $\mathcal{D}_- = \mathcal{D}_{\alpha_-}$ et $\mathcal{S}_- = \mathcal{S}_{\alpha_-}$, avec α_- un nombre rationnel strictement positif juste en dessous de la plus petite valeur critique α . Rappelons que celle-ci est égale à $1/2$ lorsque n est impair, et à 1 sinon (voir proposition 4). Dans le cas n impair on peut décrire explicitement \mathcal{S}_- comme grassmanienne relative sur l'espace des coniques \mathbf{P}_5 , mais pour n pair ce n'est plus possible. Il existe seulement une grassmanienne relative de dimension $2n+6$ **dominant** \mathcal{S}_- , qui est rappelons le de dimension $2n+5$. Les fibres de ce morphisme dominant sont génériquement des coniques.

Avant d'entamer ces deux parties nous commençons par un lemme.

Lemme 14. Soit (Γ, Θ) un système cohérent α_- -semi-stable, alors Θ est un faisceau semi-stable.

Preuve En effet si $\Theta' \subset \Theta$ est un sous-faisceau cohérent de multiplicité 1 vérifiant $\chi(\Theta') > \frac{\chi(\Theta)}{2}$, alors $\chi(\Theta') \geq \frac{\chi(\Theta)}{2} + \frac{1}{2}$. Posant $\Gamma' = \Gamma \cap H^0(\Theta')$, pour un paramètre $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, on a

$$\epsilon \dim \Gamma' + \chi(\Theta') > \epsilon + \frac{\chi(\Theta)}{2}$$

ce qui contredit la ϵ -semi-stabilité. ■

L'implication inverse est vraie lorsque n est impair, mais fausse quand n est pair comme en témoigne ce qui suit.

5.1. Le cas pair. Soit donc $\alpha_- < \alpha$ une valeur positive inférieure à la plus petite valeur critique. Soit $\mathcal{C} \subset \mathbf{P}_5 \times \mathbf{P}_2$ la conique universelle paramétrant les couples (C, x) avec C une conique et x un point de C . Le produit fibré $\mathcal{C} \times_{\mathbf{P}_5} \mathcal{C}$ paramètre les coniques avec deux points marqués, et on note \mathcal{I} le faisceau d'idéaux du plongement diagonal $\mathcal{C} \subset \mathcal{C} \times_{\mathbf{P}_5} \mathcal{C}$. On note $p : \mathcal{C} \times_{\mathbf{P}_5} \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ la projection sur le premier facteur, et on pose \mathcal{G} la grassmannienne relative $Grass(2, p_*\mathcal{I}(\frac{n}{2} + 1))$, qui est une variété de dimension $2n + 6$ munie d'une projection canonique q sur \mathcal{C} . D'après le lemme précédent on a un morphisme dominant $\mathcal{G} \dashrightarrow \mathcal{S}_-$, qui n'est que rationnel.

Lemme 15. *Un système cohérent $(\Gamma, I_{\{x\}}(\frac{n}{2} + 1))$ est α_- -instable si et seulement si il s'insère dans une suite exacte*

$$0 \longrightarrow (\Gamma, \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2})) \longrightarrow (\Gamma, I_{\{x\}}(\frac{n}{2} + 1)) \longrightarrow (0, \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2})) \longrightarrow 0 \quad (+)$$

Preuve Supposons que le système cohérent de l'énoncé soit instable, alors il existe un sous-faisceau $\Theta' \subset I_{\{x\}}(\frac{n}{2} + 1)$ de multiplicité 1 tel que

$$\epsilon \dim \Gamma' + \chi(\Theta') > \epsilon + \frac{n+2}{2} \quad (*)$$

Or comme $0 < \epsilon < 1$ et $\dim \Gamma' \leq 2$, on a nécessairement $\chi(\Theta') \geq \frac{n+2}{2}$. On a d'autre part l'inclusion $\Theta' \subset \mathcal{O}_C(\frac{n}{2} + 1)$, où C est la conique support; comme le faisceau \mathcal{O}_C est stable, on en déduit que $\chi(\Theta') = \frac{n}{2} + 1$, et donc que $\Theta' \simeq \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2})$ pour une droite l' . Dès lors (*) impose $\dim \Gamma' = 2$, et la condition nécessaire du lemme s'en déduit. La condition suffisante est immédiate. ■

On note dans cette partie $\Sigma \subset \mathcal{G}$ le fermé (muni de sa structure de schéma **réduit**) des points de \mathcal{G} qui représentent des systèmes cohérents ϵ -instables. Soit D la variété d'incidence introduite juste après la définition 16, et posons $G := Grass(2, p_*\mathcal{O}_D(\frac{n}{2}))$.

Notations: on pose de plus

- D_i , pour $i \in \{1, 2\}$, la sous-variété de $G \times D \times \mathbf{P}_2$ image réciproque de la variété d'incidence D_i (voir notations après la définition 16) par la projection naturelle $G \times D \times \mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$,
- Γ le fibré tautologique de rang 2 sur G ; τ_i pour $i = 1, 2$ les images réciproque des fibrés $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(1)$ sur chacun des deux facteurs $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$ par la projection $G \times D \rightarrow \mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$ et ζ l'image réciproque sur $G \times D$ du fibré sur D provenant de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1)$.

On a maintenant la proposition suivante, dont la preuve suit de près le schéma de la proposition 5, bien qu'étant un peu plus simple du fait que \mathcal{G} est une variété de "paramètres" et non une variété de modules.

Proposition 14. On a un isomorphisme $\Sigma \simeq G \times D$.

Preuve On construit tout d'abord un morphisme modulaire $f : G \times D \longrightarrow \mathcal{G}$. L'existence de f est assurée par le lemme suivant.

Lemme 16. Il existe une suite exacte de systèmes cohérents sur $G \times D$

$$0 \longrightarrow (\Gamma \boxtimes \tau_2^{-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{D}_1}(\frac{n}{2}) \boxtimes \tau_2^{-1}) \longrightarrow \Lambda \longrightarrow (0, \tau_2 \boxtimes \zeta^{-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(\frac{n}{2})) \longrightarrow 0$$

La famille Λ paramètre tous les systèmes cohérents du lemme 15.

Preuve Il suffit de montrer que l'on a l'extension de faisceaux correspondante sur $G \times D \times \mathbf{P}_2$. On a déjà l'extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{D}_1}(\frac{n}{2}) \boxtimes \tau_2^{-1} \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(\frac{n}{2} + 1) \longrightarrow 0$$

où le faisceau \mathcal{U} paramètre en chaque point de $G \times D$ le faisceau structural, tordu par $\mathcal{O}(\frac{n}{2} + 1)$, de la conique image par la projection $G \times D \longrightarrow \mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2 \longrightarrow \mathbf{P}_5$, la deuxième flèche associant à une paire de droites la conique singulière correspondante. Tenant compte à présent du fait qu'un point de D paramètre une droite et un point sur cette droite, on écrit la suite exacte sur $G \times D \times \mathbf{P}_2$

$$0 \longrightarrow \tau_2 \otimes \zeta^{-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{D}_2} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Delta} \longrightarrow 0$$

où Δ est l'image réciproque de la diagonale de $\mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_2$ par la projection $G \times D \times \mathbf{P}_2 \longrightarrow D \times \mathbf{P}_2 \longrightarrow \mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_2$. On vérifie en effet facilement que l'on a l'isomorphisme

$$\underline{\text{Ext}}_p^1(\mathcal{O}_{\Delta}, \mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(-1)) \simeq \tau_2^{-1} \otimes \zeta$$

en considérant par exemple la résolution bien connue de la diagonale Δ . On obtient donc une suite exacte de faisceaux cohérents sur $G \times D \times \mathbf{P}_2$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{D}_1}(\frac{n}{2}) \boxtimes \tau_2^{-1} \longrightarrow \Theta \longrightarrow \tau_2 \boxtimes \zeta^{-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(\frac{n}{2}) \longrightarrow 0$$

et une autre suite exacte

$$0 \longrightarrow \Theta \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Delta}(\frac{n}{2} + 1) \longrightarrow 0$$

Le faisceau Θ paramètre donc des faisceaux de la forme $\mathcal{I}_{\{x\}}(\frac{n}{2} + 1)$, où x est un point choisi sur la droite l'' . Maintenant l'extension de faisceaux donne naissance à une extension de systèmes cohérents de façon naturelle. Il est clair que tous les systèmes cohérents du lemme 15 sont décrits de cette façon. Ceci prouve le lemme. ■

Il est clair que f est injectif. Soit x un point de $G \times D$; nous notons également x son image par f . Supposons que x corresponde à un système cohérent (Γ, Θ) de filtration (Γ, Θ') , $(0, \Theta'')$. Soit $p : G \times D \longrightarrow \mathbf{P}_2^* \times D$ la projection naturelle. On a un diagramme commutatif dont les colonnes sont exactes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}\text{om}(\Gamma, H^0(\Theta')/\Gamma) & \hookrightarrow & \mathcal{H}\text{om}(\Gamma, H^0(\Theta)/\Gamma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_x(G \times D) & \xrightarrow{d_x f} & T_x(\mathcal{G}) \\ \downarrow d_x p & & \downarrow d_x q \\ T_{p(x)}(\mathbf{P}_2^* \times D) & \hookrightarrow & T_{q(x)}\mathcal{C} \end{array}$$

Ceci entraîne que $d_x f$ est injectif et par suite f est un plongement. ■

Le résultat suivant détermine le fibré normal $N_{\Sigma/\mathcal{G}}$ associé au plongement $\Sigma \subset \mathcal{G}$. Nous utilisons une version du Théorème 3.2 de [L1], lui-même provenant de [DL]. Les groupes $\mathcal{E}xt$ filtrés dont il est question dans le théorème proviennent de la filtration de Harder-Narasimhan relative à un paramètre α .

Théorème 12. Soit S une variété algébrique lisse, et $\Lambda = (\Lambda_s)_{s \in S}$ une famille plate de systèmes cohérents purs. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites $\forall s \in S$:

- (1) le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaira et Spencer

$$\omega_s : T_s S \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\Lambda_s, \Lambda_s)$$

est surjectif (la famille Λ est dite **complète**);

- (2) $\mathcal{E}xt_-^2(\Lambda_s, \Lambda_s) = 0$ et $\mathcal{E}xt_+^2(\Lambda_s, \Lambda_s) = 0$.

Alors la strate de Harder-Narasimhan est lisse en s , d'espace normal $\mathcal{E}xt_+^1(\Lambda_s, \Lambda_s)$.

Appliquant le théorème précédent à $S = \mathcal{G}$, la strate de Harder-Narasimhan est alors Σ ; la filtration de la famille Λ au dessus de Σ , déterminée par la suite exacte du lemme 16, paramètre en $s \in \Sigma$ la filtration de Harder-Narasimhan du système cohérent Λ_s . Une légère adaptation du théorème ci-dessus donne alors le fibré normal à Σ , moyennant la vérification de la complétude de Λ , voir condition (1).

Lemme 17. Soit $p \in \mathcal{G}$, et Λ le système cohérent fibre de la famille $\Lambda_{\mathcal{G}}$ en p . Le morphisme de déformation de Kodaira-Spencer

$$\omega : T_p \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\Lambda, \Lambda)$$

est surjectif.

Preuve Posons $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ avec $\Theta = I_{\{x\}}(\frac{n}{2} + 1)$. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(\Gamma, H^0(\Theta)/\Gamma) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\Lambda, \Lambda) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(I_{\{x\}}, I_{\{x\}}) \longrightarrow 0$$

On a d'autre part la suite exacte d'espaces tangents associée à la submersion $\rho : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{C}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(\Gamma, H^0(\Theta)/\Gamma) \longrightarrow T_p \mathcal{G} \longrightarrow T_{\rho(p)} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

Le morphisme ω induit donc une application linéaire $\omega' : T_{\rho(p)} \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(I_{\{x\}}, I_{\{x\}})$. Il reste à vérifier que ω' est surjectif. Mais le faisceau $I_{\{x\}}$, placé en degré 0, est quasi-isomorphe au complexe $I^* := 0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathbb{C}_x \longrightarrow 0$, où C est la conique support. Une suite spectrale montre alors que $\mathcal{E}xt^1(I_{\{x\}}, I_{\{x\}})$ est le groupe de cohomologie en degré 0 du complexe

$$\mathcal{E}xt^1(\mathbb{C}_x, \mathcal{O}_C) \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C) \oplus \mathcal{E}xt^1(\mathbb{C}_x, \mathbb{C}_x) \xrightarrow{(2)} \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_C, \mathbb{C}_x)$$

Mais la flèche (2) s'identifie à la projection $T(\mathbf{P}_5 \times \mathbf{P}_2)_{\rho(p)} \longrightarrow (N_{\mathcal{C}/\mathbf{P}_5 \times \mathbf{P}_2})_{\rho(p)}$. On a donc une surjection $T_{\rho(p)} \mathcal{C} \longrightarrow \text{Ker}(2)/\text{Im}(1) \simeq \mathcal{E}xt^1(I_{\{x\}}, I_{\{x\}})$. ■

On a dès lors la proposition suivante.

Proposition 15. Avec les notations du lemme 16, si l'on pose $\Lambda' = (\Gamma, \mathcal{O}_{D_1}(\frac{n}{2}))$ et $\Lambda'' = (0, \mathcal{O}_{D_2}(\frac{n}{2}))$, le fibré normal $N_{\Sigma/\mathcal{G}}$ est isomorphe à $\tau_2^{\otimes 2} \otimes \zeta^{-1} \otimes \underline{\mathcal{E}xt}_p^1(\Lambda', \Lambda'')$.

En effet la suite exacte du lemme 16 s'écrit

$$0 \longrightarrow \tau_2^{-1} \otimes \Lambda' \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \tau_2 \otimes \zeta^{-1} \otimes \Lambda'' \longrightarrow 0$$

et sa restriction en chaque point de Σ donne la filtration d'Harder-Narasimhan du système cohérent Λ . On applique alors le théorème ci-dessus.

Soit $\tilde{\mathcal{G}}$ l'éclaté de \mathcal{G} le long du fermé Σ . D'après la proposition qui précède un point du diviseur exceptionnel \mathcal{E} paramètre une suite exacte non scindée

$$0 \longrightarrow (0, \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2})) \longrightarrow (\Gamma, \Theta) \longrightarrow (\Gamma, \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2})) \longrightarrow 0 \quad (+)$$

Celle-ci définit un système cohérent ϵ -semi-stable. Ceci justifie la proposition suivante.

Proposition 16. *Il existe un morphisme canonique $\tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{S}_-$ rendant commutatif le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\mathcal{G}} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathcal{G} & \dashrightarrow & \mathcal{S}_- \end{array}$$

où le morphisme en pointillé est le morphisme rationnel canonique de lieu d'indétermination Σ . De plus on a un diagramme **cartésien**

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{E} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \Sigma & & \mathcal{P} \\ \searrow & & \swarrow \\ & G \times \mathbf{P}_2^* & \end{array}$$

où le morphisme $\Sigma \longrightarrow G \times \mathbf{P}_2^*$ est celui de l'oubli du point marqué sur la conique, et $\mathcal{P} \longrightarrow G \times \mathbf{P}_2^*$ est le fibré projectif (au sens usuel) $\mathbf{P}(\underline{\text{Ext}}_p^1(\Lambda', \Lambda''))$ (voir proposition 15); il existe un morphisme canonique $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{S}_-$ birationnel sur son image formé des classes de systèmes cohérents s'insérant dans une suite exacte de type (+).

Preuve La preuve est identique à celle du théorème 11. La cartésianité du diagramme est conséquence de la ■

On peut imiter sur \mathcal{G} la construction des fibrés déterminants sur les espaces de modules \mathcal{S}_α . On reprend les notations du début de cette section. On note $\Gamma_{\mathcal{G}}$ le fibré tautologique de rang 2 sur \mathcal{G} , et p, q les projections

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times \mathbf{P}_2 & \xrightarrow{q} & \mathbf{P}_2 \\ \downarrow p & & \\ \mathcal{G} & & \end{array}$$

On pose le fibré inversible $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ sur \mathcal{G} défini par

$$\mathcal{D}_{\mathcal{G}} = \det p_!(\mathcal{J}(\frac{n}{2} + 1) \cdot q^*h) \otimes \det \Gamma_{\mathcal{G}}^{-1}$$

C'est l'analogue du fibré \mathcal{D}_- sur \mathcal{S}_- , et il est plus simple à construire du fait de l'existence d'une famille de systèmes cohérents paramétrée par \mathcal{G} .

Lemme 18. On a $\mathcal{D}_{\mathcal{G}} \simeq \det \Gamma_{\mathcal{G}}^{-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}(\frac{n}{2}, -1)}$; utilisant les notations du lemme 16, on a de plus $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}|_{\Sigma} \simeq \det \Gamma^{-1} \otimes \tau_1^{\otimes \frac{n}{2}} \otimes \tau_2^{\otimes \frac{n}{2}+2} \otimes \zeta^{-1}$.

La notation $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(., .)$ fait référence au produit externe des fibrés inversibles provenant des projections de \mathbb{C} sur chacun des deux facteurs.

Preuve De la suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C} \times \mathbf{P}_5} \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Delta} \longrightarrow 0$ et de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-1, 0) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C} \times \mathbf{P}_2} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C} \times \mathbf{P}_5} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

on déduit que

$$\mathcal{D}_{\mathcal{G}} \simeq \det \Gamma_{\mathcal{G}}^{-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\frac{n}{2}, 0) \otimes \det p_!(\mathcal{O}_{\Delta}(\frac{n}{2} + 1) \cdot q^*h)^{-1}$$

Maintenant la résolution du faisceau \mathcal{O}_{Δ} donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(0, -2) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(\frac{n}{2}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(0, -1) \boxtimes Q(\frac{n}{2}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C} \times \mathbf{P}_2}(\frac{n}{2} + 1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\Delta}(\frac{n}{2} + 1) \longrightarrow 0$$

d'où l'on déduit

$$\det p_!(\mathcal{O}_{\Delta}(\frac{n}{2} + 1) \cdot q^*h) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(0, \chi(Q|_l(\frac{n}{2})) - 2\chi(\mathcal{O}_l(\frac{n}{2}))) \quad (*)$$

On rappelle en effet que h est la classe d'un faisceau structural \mathcal{O}_l , avec l une droite. Comme on a $Q|_l \simeq \mathcal{O}_l \oplus \mathcal{O}_l(1)$, on peut dire que $(*) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(0, 1)$. Nous savons que la construction d'un tel fibré $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ est fonctorielle (voir [L3]), et utilisant l'isomorphisme $G \times D \xrightarrow{\simeq} \Sigma$ on a $\Gamma_{\mathcal{G}}|_{\Sigma} \simeq \Gamma \boxtimes \tau_2^{-1}$. Le lemme s'ensuit. ■

Notons $\varphi : \tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{G}$ et $\psi : \tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{S}_-$ les morphismes précédents. On a une projection composée $\tilde{\mathcal{G}} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathbf{P}_2$, et notons encore ζ l'image réciproque sur \mathcal{G} et $\tilde{\mathcal{G}}$ de la classe de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1)$. Comme une droite coupe une conique générale en deux points et que la fibre générale de la projection $\tilde{\mathcal{G}} \xrightarrow{\psi} \mathcal{S}_-$ est la conique support en un point, on a d'après la formule de projection

$$c_1(\psi^*\mathcal{D}_-)^{2n+5} \cdot \zeta \cap [\tilde{\mathcal{G}}] = 2 c_1(\mathcal{D}_-)^{2n+5} \cap [\mathcal{S}_-]$$

D'autre part on a évidemment

$$c_1(\varphi^*\mathcal{D}_{\mathcal{G}})^{2n+5} \cdot \zeta \cap [\tilde{\mathcal{G}}] = c_1(\mathcal{D}_{\mathcal{G}})^{2n+5} \cdot \zeta \cap [\mathcal{G}]$$

On pose donc naturellement

$$\Delta = 2 c_1(\mathcal{D}_-)^{2n+5} \cap [\mathcal{S}_-] - c_1(\mathcal{D}_{\mathcal{G}})^{2n+5} \cdot \zeta \cap [\mathcal{G}]$$

qui est égal d'après ce qui précède à $(c_1(\psi^*\mathcal{D}_-)^{2n+5} - c_1(\varphi^*\mathcal{D}_{\mathcal{G}})^{2n+5}) \cdot \zeta \cap [\tilde{\mathcal{G}}]$.

Lemme 19. Notant e la classe du diviseur exceptionnel \mathcal{E} , on a la relation

$$c_1(\varphi^*\mathcal{D}_{\mathcal{G}}) = c_1(\psi^*\mathcal{D}_-) + e$$

Preuve La démonstration de ce lemme est identique à celle du lemme 6. Elle s'appuie sur l'isomorphisme $\varphi^*\mathcal{D}_{\mathcal{G}} \simeq \psi^*\mathcal{D}_- \otimes \mathcal{O}(\mathcal{E})$, qui se démontre à l'aide de la suite exacte dans la preuve de la proposition 16. ■

Calculons Δ . On pose $d_{\mathcal{G}} = c_1(\mathcal{D}_{\mathcal{G}})$ et $d_- = c_1(\mathcal{D}_-)$. Par un raisonnement identique à celui effectué à la section 4.3, on peut écrire

$$\Delta = -\frac{1}{e} \cdot (\psi^*(d_-)^{2n+5}|_{\mathcal{E}} - \varphi^*(d_{\mathcal{G}})^{2n+5}|_{\mathcal{E}}) \cdot \zeta \cap [\mathcal{E}]$$

On pose γ_i , pour $i = 1, 2$ les classes de Chern du fibré tautologique Γ sur $G = Grass(2, p_* \mathcal{O}_D(\frac{n}{2}))$. Rappelons alors que \mathcal{E} s'insère dans un diagramme cartésien (voir proposition 16) faisant intervenir Σ, \mathcal{P} et G ; soit $l_{\mathcal{P}}$ le fibré relativement ample sur le fibré projectif \mathcal{P} .

Lemme 20. On a $\psi^*(d_-)|_{\mathcal{E}} = l_{\mathcal{P}} + \frac{n}{2}(\tau_1 + \tau_2) - \gamma_1$.

On a par ailleurs $d_{\mathcal{G}}|_{\Sigma} = -\gamma_1 + \frac{n}{2}\tau_1 + (\frac{n}{2} + 2)\tau_2 - \zeta$ (voir le deuxième point du lemme 18). Posons $v = -\gamma_1 + \frac{n}{2}(\tau_1 + \tau_2)$, on en tire

$$\Delta = \sum_{0 \leq j \leq i \leq 2n+4} \binom{2n+5}{i+1} (2\tau_2 - \zeta)^{i-j} \cdot v^{2n+4-i} \cdot l_{\mathcal{P}}^j \cdot \zeta \cap [\mathcal{E}] \quad (*)$$

Notons $\rho : \mathcal{P} \rightarrow G \times \mathbf{P}_2^*$ la projection canonique, on a donc $\forall j \quad \rho_*(l_{\mathcal{P}}^j) = s_{j-n-2}(\mathcal{F}^{\vee})$, où \mathcal{F} est le fibré $\underline{\text{Ext}}_p^1(\Lambda', \Lambda'')$ de la proposition 15. En effet le fibré projectif \mathcal{P} est isomorphe au fibré au sens de Grothendieck $\mathbb{P}(\mathcal{F}^{\vee})$. Comme précédemment dans une situation identique, on a deux résolutions

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma^* \boxtimes S^{\frac{n}{2}} Q & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{J}(2, 1) \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O} & \longrightarrow & \tau_1 \boxtimes Q & \longrightarrow & \mathcal{J}(2, 1) \longrightarrow 0 \end{array}$$

On a dès lors

$$\begin{aligned} s(\mathcal{F}^{\vee}) &= c(\mathcal{F})^{-1} = s(\Gamma \boxtimes S^{\frac{n}{2}} Q^*) \cdot c(\tau_1 \boxtimes Q)^{-1} \\ &= s(\Gamma \boxtimes S^{\frac{n}{2}} Q^*) \cdot (1 + \tau_1 - \tau_2) \cdot (1 + \tau_1)^{-3} \end{aligned}$$

On réindexe la somme (*) en posant $i := i + 1, j := j + 1$

$$\Delta = \sum_{n+3 \leq j \leq i \leq 2n+5} \binom{2n+5}{i} v^{2n+5-i} \cdot (2\tau_2 - \zeta)^{i-j} \cdot s_{j-n-3}(\mathcal{F}^{\vee}) \cdot \zeta \cap [G \times D]$$

Ceci revient à écrire

$$\begin{aligned} \Delta &= \left[(1+v)^{2n+5} \cdot \frac{\zeta \cdot (1+\tau_1-\tau_2)}{[1-(2\tau_2-\zeta)] \cdot (1+\tau_1)^3} \cdot s(\Gamma \boxtimes S^{\frac{n}{2}} Q^*) \right]_{n+3} \cap [G \times D] \\ &= \sum_{\substack{0 \leq m; l \\ n-2 \leq l+m \leq n+2}} (-1)^m \binom{2n+5}{m} \frac{[1+\frac{n}{2}(\tau_1+\tau_2)]^{2n+5-m} \cdot (1+\tau_1-\tau_2) \cdot \zeta}{[1-(2\tau_2-\zeta)] \cdot (1+\tau_1)^3} \cdot \gamma_1^m \cdot s_l(\Gamma \boxtimes S^{\frac{n}{2}} Q^*) \end{aligned}$$

On pose $\mu = (\frac{n}{2} + 1)$. On prend les images directes des classes $\gamma_1^m \cdot s_l(\Gamma \boxtimes S^{\frac{n}{2}} Q^*)$ par le morphisme de projection $G \times \mathbf{P}_2^* \rightarrow \mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$ qui d'après le lemme 11 sont égales à

$$\frac{1}{\mu+1} \sum_{\substack{0 \leq l_0 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq l \\ l+m-n \leq l_0+(l_3-l_2) \leq \min(l+m+2-n, 2)}} f_{0,n}(\mathbf{l}, m) \tau_1^{l+m+2-n-l_0-(l_3-l_2)} \cdot \tau_2^{l_0+(l_3-l_2)}$$

Dans le lemme 11 la notation ζ désignait le nombre $(\frac{n}{2} - \alpha + 1)$; pour $\alpha = 0$ on remplace ici cette écriture par μ . Après avoir posé la réindexation $m := l + m - (n - 2), l := l$, on obtient l'expression suivante de Δ

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{\mu+1} \sum_{\substack{0 \leq m \leq 4 \\ 0 \leq l_0 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq l \leq m+(n-2) \\ m-2 \leq l_0+(l_3-l_2) \leq \min(m, 2)}} & (-1)^{m+l} \binom{2n+5}{n+7+l-m} f_{0,n}(\mathbf{l}, m+(n-2)-l) \\ & \frac{[1+\frac{n}{2}(\tau_1+\tau_2)]^{2n+5-m} \cdot (1+\tau_1-\tau_2) \cdot \zeta}{[1-(2\tau_2-\zeta)] \cdot (1+\tau_1)^3} \cdot \tau_1^{m-l_0-(l_3-l_2)} \cdot \tau_2^{l_0+(l_3-l_2)} \end{aligned}$$

On écrit alors

$$\frac{\zeta}{1-2\tau_2+\zeta} = \frac{1}{1-2\tau_2} \cdot \left[\frac{\zeta}{1+\frac{\zeta}{1-2\tau_2}} \right] = \frac{\zeta}{1-2\tau_2} \cdot \left(1 - \frac{\zeta}{1-2\tau_2} \right)$$

Tenant compte enfin du fait que seuls les nombres d'intersection sur D

$$\tau_2^2 \cdot \zeta \cap [D] = \tau_2 \cdot \zeta^2 \cap [D] = 1$$

sont non nuls, on obtient en posant les fonctions rationnelles $H_i(\tau_1, \tau_2)$ suivantes pour $i = 1, 2$

$$H_i(\tau_1, \tau_2) = \frac{\left[1 + \frac{n}{2}(\tau_1 + \tau_2)\right]^{n+7+l-m} \cdot (1 + \tau_1 - \tau_2)}{(1 + \tau_1)^3 \cdot (1 - 2\tau_2)^i}$$

l'expression finale de Δ

$\Delta = \frac{(-1)^n}{\mu+1} \sum_{\substack{0 \leq m \leq 4 \\ 0 \leq l_0 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq l \leq m + (n-2) \\ m-2 \leq l_0 + (l_3 - l_2) \leq \min(m, 2) \\ 1 \leq i \leq 2}}$	$(-1)^{m+l} \binom{2n+5}{n+7+l-m} f_{0,n}(\mathbf{1}, m + (n-2) - l) [H_i(\tau_1, \tau_2)]_{i-l_0-(l_3-l_2)}^{2+l_0+(l_3-l_2)-m}$
---	---

la notation $[H_i(\tau_1, \tau_2)]_y^x$ désignant le coefficient devant le monôme $\tau_1^x \cdot \tau_2^y$ dans le développement en série formelle de la fraction rationnelle H_i . Naturellement si $i = 1$ et $l_0 + (l_3 - l_2) = 2$ ce coefficient est nul.

Il reste à calculer $I_{\mathcal{G}} = c_1(\mathcal{D}_{\mathcal{G}})^{2n+5} \cdot \zeta \cap [\mathcal{G}]$. Posons maintenant $q : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{C}$ la projection canonique, et $\gamma = c_1(\Gamma_{\mathcal{G}})$, $\tau = c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(1, 0))$, ainsi que $\zeta = c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(0, 1))$.

D'après le lemme 18 on a $c_1(\mathcal{D}_{\mathcal{G}}) = -\gamma + \frac{n}{2}\tau - \zeta$, on a donc

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{G}} &= -\left(\gamma - \frac{n}{2}\tau + \zeta\right)^{2n+5} \cdot \zeta \cap [\mathcal{G}] \\ &= -\left[\left(\gamma - \frac{n}{2}\tau\right)^{2n+5} \cdot \zeta + (2n+5) \left(\gamma - \frac{n}{2}\tau\right)^{2n+4} \cdot \zeta^2\right] \cap [\mathcal{G}] \end{aligned}$$

Calculons d'abord $I'_{\mathcal{G}} = \left(\gamma - \frac{n}{2}\tau\right)^{2n+5} \cdot \zeta \cap [\mathcal{G}]$. Dans ce qui suit, on note \mathcal{F} le fibré vectoriel $p_*\mathcal{J}(\frac{n}{2} + 1)$ où $p : \mathcal{C} \times_{\mathbf{P}_5} \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ est la première projection et \mathcal{J} est le faisceau d'idéaux du plongement diagonal $\mathcal{C} \simeq \Delta \subseteq \mathcal{C} \times_{\mathbf{P}_5} \mathcal{C}$. Ci-dessous on prend à la deuxième ligne l'image directe des classes γ^m par la morphisme q

$$\begin{aligned} I'_{\mathcal{G}} &= \sum_{2n \leq m \leq 2n+5} \binom{2n+5}{m} \left(-\frac{n}{2}\right)^{2n+5-m} \gamma^m \cdot \tau^{2n+5-m} \cdot \zeta \cap [\mathcal{G}] \\ &= \sum_{\substack{2n \leq m \leq 2n+5 \\ n \leq p \leq m+1-n}} \binom{2n+5}{m} \left(-\frac{n}{2}\right)^{2n+5-m} \binom{m}{p} \begin{vmatrix} s_{m-p-n}(\mathcal{F}) & s_{p-n-1}(\mathcal{F}) \\ s_{m-p-n+1}(\mathcal{F}) & s_{p-n}(\mathcal{F}) \end{vmatrix} \cdot \tau^{2n+5-m} \cdot \zeta \cap [\mathcal{C}] \end{aligned}$$

Après avoir posé la réindexation $m := m - 2n$, $p := p - n$ dans la somme précédente, on obtient

$$I'_{\mathcal{G}} = \sum_{\substack{0 \leq m \leq 5 \\ 0 \leq p \leq m+1}} \binom{2n+5}{5-m} \left(-\frac{n}{2}\right)^{5-m} \binom{m+2n}{p+n} \begin{vmatrix} s_{m-p}(\mathcal{F}) & s_{p-1}(\mathcal{F}) \\ s_{m-p+1}(\mathcal{F}) & s_p(\mathcal{F}) \end{vmatrix} \cdot \tau^{5-m} \cdot \zeta \cap [\mathcal{C}]$$

Maintenant en prenant l'image directe par p de la suite exacte de faisceaux cohérents sur $\mathcal{C} \times_{\mathbf{P}_5} \mathcal{C}$ donnée par

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C} \times_{\mathbf{P}_5} \mathcal{C}} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \longrightarrow \mathcal{O}_{\Delta} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \longrightarrow 0$$

on obtient la suite exacte suivante de fibrés vectoriels sur \mathcal{C}

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow p_* \mathcal{O}_{\mathcal{C} \times_{\mathbf{P}_5} \mathcal{C}} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \longrightarrow 0$$

En effet p induit un isomorphisme $p|_{\Delta} : \Delta \simeq \mathcal{C}$. On a de plus la suite exacte de faisceaux cohérents sur $\mathcal{C} \times \mathbf{P}_2$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C} \times_{\mathbf{P}_5} \mathcal{C}} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \longrightarrow 0$$

En prenant l'image directe p_* , on obtient encore la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(-1)^{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}}^{\left(\frac{n}{2}+3\right)} \longrightarrow p_* \mathcal{O}_{\mathcal{C} \times_{\mathbf{P}_5} \mathcal{C}} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \longrightarrow 0$$

On tire de ce qui précède que $s(\mathcal{F}) = (1 + \tau)^{\mu} \cdot (1 - (\frac{n}{2} + 1) \zeta)$. On a alors

$$\begin{aligned} s_{m-p}(\mathcal{F}) \cdot s_p(\mathcal{F}) - s_{m-p+1}(\mathcal{F}) \cdot s_{p-1}(\mathcal{F}) &= \left[\binom{\mu}{m-p} \binom{\mu}{p} - \binom{\mu}{m-p+1} \binom{\mu}{p-1} \right] \tau^m \\ &+ \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \left[\binom{\mu}{m-p+1} \binom{\mu}{p-2} - \binom{\mu}{m-p-1} \binom{\mu}{p} \right] \tau^{m-1} \cdot \zeta \\ &= \frac{m-2p+1}{\mu+1} \binom{\mu+1}{m-p+1} \binom{\mu+1}{p} \tau^m \\ &+ \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \left[\binom{\mu}{m-p+1} \binom{\mu}{p-2} - \binom{\mu}{m-p-1} \binom{\mu}{p} \right] \tau^{m-1} \cdot \zeta \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement, compte tenu du fait que $\tau^5 \cdot \zeta \cap [\mathcal{C}] = 2$ et $\tau^4 \cdot \zeta^2 \cap [\mathcal{C}]$. Cela donne le résultat final pour $I'_{\mathcal{G}}$

$$I'_{\mathcal{G}} = \sum_{\substack{0 \leq m \leq 5 \\ 0 \leq p \leq m+1}} \binom{2n+5}{5-m} \left(-\frac{n}{2} \right)^{5-m} \binom{m+2n}{p+n} \left[2 \frac{m-2p+1}{\mu+1} \binom{\mu+1}{m-p+1} \binom{\mu+1}{p} + \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \left[\binom{\mu}{m-p+1} \binom{\mu}{p-2} - \binom{\mu}{m-p-1} \binom{\mu}{p} \right] \right]$$

Posons maintenant et calculons $I''_{\mathcal{G}} = (\gamma - \frac{n}{2}\tau)^{2n+4} \cdot \zeta^2 \cap [\mathcal{G}]$. Des calculs identiques aux précédents donnent

$$I''_{\mathcal{G}} = \sum_{\substack{0 \leq m \leq 4 \\ 0 \leq p \leq m+1}} \binom{2n+4}{4-m} \left(-\frac{n}{2} \right)^{4-m} \binom{m+2n}{p+n} \begin{vmatrix} s_{m-p}(\mathcal{F}) & s_{p-1}(\mathcal{F}) \\ s_{m-p+1}(\mathcal{F}) & s_p(\mathcal{F}) \end{vmatrix} \cdot \tau^{4-m} \cdot \zeta^2 \cap [\mathcal{C}]$$

ce qui donne finalement

$$I''_{\mathcal{G}} = \sum_{\substack{0 \leq m \leq 4 \\ 0 \leq p \leq m+1}} \binom{2n+4}{4-m} \left(-\frac{n}{2} \right)^{4-m} \binom{m+2n}{p+n} \frac{m-2p+1}{\mu+1} \binom{\mu+1}{m-p+1} \binom{\mu+1}{p}$$

On a donc obtenu la proposition suivante.

Proposition 17. *On a avec les expressions de $I'_{\mathcal{G}}$ et $I''_{\mathcal{G}}$ ci-dessus*

$$I_{\mathcal{G}} = -I'_{\mathcal{G}} - (2n+5)I''_{\mathcal{G}}$$

5.2. **Le cas n impair.** Ce cas est plus simple à traiter que le précédent, grâce à la proposition qui suit. On note \mathcal{S} l'espace de modules \mathcal{S}_ϵ pour un paramètre $\epsilon > 0$ strictement inférieur à la plus petite valeur critique, c'est-à-dire $1/2$. Soit p l'entier tel que $2p + 1 = n + 2$, et $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{P}_5$ la conique universelle introduite au paragraphe précédent. Soit $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(1)$ le fibré inversible sur \mathcal{C} image réciproque du fibré $\mathcal{O}(1)$ par la projection $q : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{P}_2$.

Proposition 18. *Si \mathcal{E} désigne le fibré vectoriel $p_*(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(p))$ sur \mathcal{C} , on a $\mathcal{S} \simeq \text{Grass}(2, \mathcal{E})$.*

Preuve La preuve s'appuie sur le lemme suivant.

Lemme 21. *Si Θ est un faisceau stable de support schématique une conique, de caractéristique d'Euler-Poincaré $n + 2$, et si $\Gamma \subset H^0(\Theta)$ est un pinceau de sections le système cohérent (Γ, Θ) est ϵ -stable.*

Preuve Pour tout sous-faisceau cohérent $\Theta' \subset \Theta$ de multiplicité 1 on a par hypothèse de stabilité $\chi(\Theta') \leq \frac{n+1}{2}$. Alors pour $\epsilon < 1/2$ et $\Gamma' = \Gamma \cap H^0(\Theta')$ l'inégalité $\epsilon \dim(\Gamma') + \chi(\Theta') \leq \frac{n+2}{2} + \epsilon$ est clairement vérifiée. ■

Maintenant pour chaque conique C du plan, le faisceau $\mathcal{O}_C(p)$ vérifie les hypothèses du lemme. On a donc un morphisme modulaire $f : \text{Grass}(2, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{S}$ qui est clairement injectif. Comme les deux variétés ont même dimension, et que \mathcal{S} est une variété normale (cf théorème 8), le morphisme f est un isomorphisme. ■

On note γ la première classe de Chern du sous-fibré tautologique de rang 2 sur \mathcal{S} , et τ l'image réciproque de la classe du fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_5}(1)$ par le morphisme de projection $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{P}_5$. On note enfin \mathcal{D} le fibré inversible "déterminant" sur l'espace de modules \mathcal{S} et $d = c_1(\mathcal{D})$.

Lemme 22. *On a $d = (p - 1)\tau - \gamma$.*

Preuve Soit (Γ, Θ) une famille universelle de systèmes cohérents paramétrée par \mathcal{S} . On peut supposer que le faisceau Θ est $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(p)$. Alors si l est une droite quelconque du plan, on a

$$\mathcal{D} \simeq \det(p_!(\Theta \cdot [\mathcal{O}_l])) \otimes \det(\Gamma^*) \simeq \tau^{\otimes p-1} \otimes \det(\Gamma)^*$$

Ceci se voit en effet en utilisant la résolution suivante du faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(p)$ comme $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_5 \times \mathbf{P}_2}$ -module

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-1, p-2) \rightarrow \mathcal{O}(0, p) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(p) \rightarrow 0 \quad (*)$$

■

On doit donc pour finir calculer $I = d^{2n+5} \cap [\mathcal{S}]$. On a

$$\begin{aligned} I &= \sum_{0 \leq k \leq 2n+5} (-1)^k \binom{2n+5}{k} (p-1)^{2n+5-k} \tau^{2n+5-k} \cdot \pi_*(\gamma^k) \cap [\mathbf{P}_5] \\ &= \sum_{0 \leq l \leq k \leq 2n+5} (-1)^k \binom{2n+5}{k} \binom{k}{l} (p-1)^{2n+5-k} \begin{vmatrix} s_{k-l-n}(\mathcal{E}) & s_{l-n-1}(\mathcal{E}) \\ s_{k-l-n+1}(\mathcal{E}) & s_{l-n}(\mathcal{E}) \end{vmatrix} \cdot \tau^{2n+5-k} \end{aligned}$$

De la suite exacte (*) on déduit la résolution suivante du fibré \mathcal{E} , en posant $a = p(p-1)/2$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}_5}(-1)^a \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}_5}^{\binom{p+2}{2}} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0$$

ce qui donne $s(\mathcal{E}) = c(\mathcal{E}^\vee)^{-1} = (1 + \tau)^a$. On obtient finalement

$$I = \frac{1}{a+1} \sum_{0 \leq l \leq k \leq 2n+5} (-1)^k \binom{2n+5}{k} \binom{k}{l} (p-1)^{2n+5-k} (k-2l+1) \binom{a+1}{k-l-n+1} \binom{a+1}{l-n}$$

TABLE 2. Valeurs de Δ et $I_<$ pour $n \leq 6$

	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
Δ	6558	\times	10278
$I_<$	-6006	- 5148	- 8580

5.3. Applications numériques pour $n \leq 6$. Suivant les notations des deux derniers paragraphes, nous récapitulons les valeurs de $I_<$ et Δ pour $n \leq 6$. Le symbole $I_<$ désigne $I_{\mathcal{G}}$ si n est pair, et I si n est impair, c'est-à-dire le nombre d'intersection sur la grassmanienne relative; le symbole Δ ne concerne que $n = 4, 6$ et est égal au saut entre \mathcal{S}_{1-} et \mathcal{G} .

On obtient finalement le degré cherché pour n pair par la formule $\deg \overline{P}_n = \frac{1}{2}(I_< + \Delta) + \sum_{\alpha > 0} \Delta_{\alpha}$, la seconde somme portant sur les valeurs critiques $\alpha > 0$; pour n impair, en l'occurrence $n = 5$ on a $\deg \overline{P}_n = I_< + \sum_{\alpha > 0} \Delta_{\alpha}$. Les valeurs Δ_{α} ont été reportées dans la table du paragraphe 4.4. On obtient ainsi le théorème 2. Celui-ci suggère que le comportement de $\deg \overline{P}_n$ dépend de la parité de n . Nous ne pouvons cependant confirmer cette observation.

5.4. Remerciements. Cet article est une version remaniée et augmentée d'un chapitre de la thèse de l'auteur. La question du calcul du degré de la variété des courbes de Poncelet m'avait été proposée par Joseph Le Potier, hélas disparu en Décembre 2005. Je lui dois de nombreux conseils et suggestions.

REFERENCES

- [B] Barth W., *Moduli of vector bundles on the projective plane*, Invent. Math 42 p.63-93, 1977.
- [BL] Baniča C., Le Potier J., *Existence de fibrés holomorphes sur les surfaces non algébriques*, J. reine angew. Math 378, 1987.
- [D] Darboux G., *Principes de géométrie analytique*, Vol.3, p. 250-287, Gauthier-Villars, 1917.
- [De] Drézet J.-M., *Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbf{P}_2(\mathbb{C})$* , Ann. de l'Institut Fourier **38** (1988), 105-168.
- [DL] Drézet J.-M., Le Potier J., *Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur le plan projectif*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série **18** (1985), 105-108.
- [DN] Drézet J.-M., Narasimhan M.S., *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques*, Invent. Math. **97** (1989), 53-94.
- [EGA3] Dieudonné J., Grothendieck A., *Etude cohomologique des faisceaux cohérents*, EGA3, Publ. Math. IHES, 1961.
- [F] Fulton W., *Intersection theory*, Second edition, Springer Verlag, 1998.
- [GM] Gelfand S.I., Manin Yu.I., *Methods of homological algebra*, Springer Verlag, 1996.
- [G] Gieseker D., *Moduli of vector bundles on projective surfaces*, Ann. of Math, 1977.
- [Ha] Hartshorne R., *Algebraic geometry*, GTM 52, Springer-Verlag, 1977.
- [Ha2] *ibid.*, *Residues and duality*, LNM 20, Springer-Verlag, Heidelberg(1966).
- [Har] Harris J., *Algebraic geometry, a first course*, GTM 133, Springer.
- [HL] Huybrechts D., Lehn M., *Geometry of moduli spaces of semi-stable sheaves*, Asp. of Math. Vol E31, 1997.
- [L] Le Potier J., *Lectures on vector bundles*, Camb. studies in adv. math. (54), 1997.
- [L1] *ibid.*, *Systèmes cohérents et polynômes de Donaldson*, in: Maruyama M. (Ed.), Proceedings du symposium Taniguchi, LNM 179, Springer-Verlag, 1996.
- [L2] *ibid.*, *Systèmes cohérents et structures de niveaux*, Astérisque 214 (Publ. de la SMF), 1993.
- [L3] *ibid.*, *Fibré déterminant et courbes de saut sur les surfaces algébriques*, Proc. of Conf. on Complex Projective Geometry (Bergen 1989), LNS 179, pp.213 – 240.
- [LH] *ibid.*, Hulek K., *Sur l'espace de modules des faisceaux stables de rang 2, de classes de Chern $(0, 3)$ sur \mathbb{P}_2* , Annales de l'institut Fourier 39 p.251-292, 1989.
- [LT] Le Potier J., Tikhomirov A., *Sur le morphisme de Barth*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. t.34 p.573-629, 2001.

- [M] Maruyama M., *Moduli of stable sheaves*, II, J.math.Kyoto University **18** (1978) 557-614.
- [He] He M., *Espace de modules de systèmes cohérents*, Int. J. Math. 9 (2) p.545-598, 1998.
- [MuF] Mumford D., Fogarty J., *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, 1982.
- [Muk] Mukai S., *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or K_3 surface*, Invent. Math. 77 p.101-116, 1984.
- [Se] Serre J.P., *Algèbre locale et multiplicités*, LNM 11, Springer-Verlag, 1989.
- [Th] Thaddeus M., *Stable pairs, linear systems and the Verlinde formula*, Invent. Math. 117 (2) p.317-353, 1994.
- [T] Toma M., *Birational models for varieties of Poncelet curves*, Manuscr. math. 90 p.105-121, 1996.
- [Tr] Trautmann G., *Poncelet curves and associated theta characteristics*, Expo. Math. 6 p.29-64, 1988.